

固有モードの連成強度解析を用いた
パンタグラフの摩擦振動低減対策

小林 樹幸* 天野 佑基* 山下 義隆*

Countermeasures for Friction-Induced Vibration in Pantographs
Using Modal Coupling Strength Analysis

Shigeyuki KOBAYASHI Yuki AMANO Yoshitaka YAMASHITA

This study investigates friction-induced unstable vibrations in railway pantographs through modal coupling analysis. A flexible multibody dynamics model was developed to examine the effect of sliding friction on natural modes. Coupling strength was introduced as a quantitative measure. The results showed that under knuckle-backward conditions, increasing friction narrows the frequency gap between the first and fourth modes, causing instability above a friction coefficient of 0.79. Parametric studies revealed that reducing plate spring stiffness weakens coupling and suppresses vibrations. Hammering tests and modal analysis confirmed the validity of the simulations, showing that reducing the thickness of plate springs decreases coupling strength and mitigates instability.

キーワード：パンタグラフ, すり板, トロリ線, 摩擦, 摩擦振動, 連成強度解析

1. はじめに

鉄道車両の集電装置であるパンタグラフは、その最上部に取り付けられたすり板をトロリ線と接触させることで車両へ電力を導く役割を担う。車両の走行中はすり板とトロリ線がしゅう動接触しており、またトロリ線とすり板の試験片を用いた実験から、しゅう動速度が低くなるにつれて摩擦係数が増大する傾向が確認されている¹⁾。このことに加えて、すり板のしゅう動面が摩耗やアーク放電による溶損等に起因して荒れた状態になると摩擦係数が増加して、駅構内等で低速走行する際にパンタグラフが大きく上下に振動する現象（以下、摩擦振動）が稀に発生することが知られている²⁾。この現象は、すり板とトロリ線の摩耗量増加に対する寄与が指摘されているため³⁾、その対策が望まれる。

著者らは摩擦振動の現象解明を行うため、舟体と枠組の弾性変形を考慮可能なパンタグラフの柔軟マルチボディダイナミクス（Flexible Multi-Body Dynamics, 以下、FMBD）モデルを用いた解析的検討⁴⁾を行うとともに、実験に基づく実機パンタグラフの安定性評価手法として、鉄道総研の高速パンタグラフ試験装置⁵⁾を用いた低速でのしゅう動実験を提案した。これにより、摩擦振動の発生メカニズムは摩擦力により固有モード同士が連成する現象であることが明らかにされた⁶⁾が、メカニズムに基づいて摩擦振動対策を行う方法は提案されていなかった。

そこで本報告では、固有モード同士の連成しやすさを評価する連成強度解析を用いた摩擦振動対策手法を提案する⁷⁾。さらに、連成強度解析に基づいて構造変更を施したパンタグラフの安定性評価を高速パンタグラフ試験装置を用いて行うことで、提案手法の有効性を検証する。

* 鉄道力学研究部 集電力学研究室

2. パンタグラフの摩擦振動を表現する FMBD モデル

2.1 FMBD モデル

過去の研究において、摩擦係数に対する固有振動数の変化を調べることで固有モード同士の連成を評価するために、シングルアームパンタグラフの FMBD モデルを構築した⁴⁾。FMBD モデルの外観図を図 1 に示す。本モデルでは、パンタグラフのリンク機構を表現しつつ部材の曲げ変形も表現可能とするために、はり要素を用いて各部材を離散化した。舟体、すり板と微動ばねのモデル化方法について、図 2 を参照して以下に述べる。このパンタグラフのすり板は図 2 に示すようにすり板同士が板ばねで連結されるとともに、その両端と舟体がピン結合されているため、FMBD モデルでは補助すり板から下方にはり要素を取り付け、その先端と舟体を剛性が比較的高いばね要素で接続することでピン結合を表現した。すり板の中央部は微動ばねで支持されており、ばね要素により微動ばねをモデル化した。

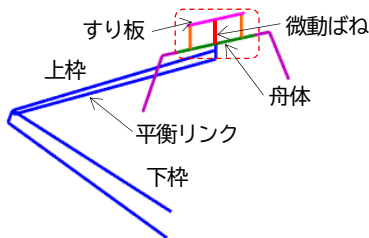


図 1 パンタグラフの FMBD モデル

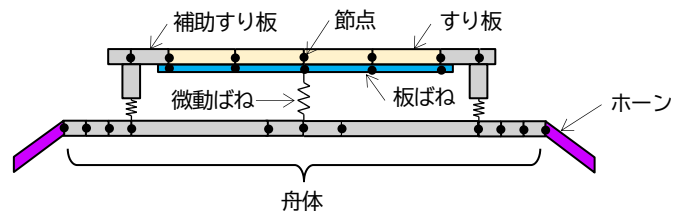


図 2 舟体とすり板の詳細なモデル

2.2 摩擦係数に対する固有振動数の変化

本節では FMBD モデルにおいて、摩擦係数の変化が固有振動数の変化に与える影響について調べる。解析対象とする摩擦係数は、高速パンタグラフ試験装置を用いた低速しゅう動実験で測定された最大値である 1 までとし⁴⁾、進行方向は枠組のくの字型の頂点が前側となるなびき条件と、後ろ側となる反なびき条件の両方について複素固有値解析を行った。なびき条件と反なびき条件について得られた固有振動数を、それぞれ図 3(a)と図 3(b)に示すとともに、摩擦振動が発生する摩擦係数および固有振動数を丸印と中括弧で表す。本報告では、摩擦係数ゼロの状態において固有振動数が最も低い固有モードから昇べきの順に 1 次、2 次と称する。本図より、摩擦係数の増加に伴い 1 次モードと 4 次モードの固有振動数の差が、なびき条件では大きくなり摩擦振動は発生しないが、反なびき条件では差が小さくなるとともに摩擦係数 0.79 以上の場合に摩擦振動が発生することがわかる。各固有モード形状における支配的な運動は、1 次モードは枠組の上下運動、2 次モードは枠組の前後運動、3 次モードは舟体のローリング運動、4 次モードは平衡リンクの上下運動である。パンタグラフの摩擦振動の低減には、このような固有モードの連成を防ぐことが有

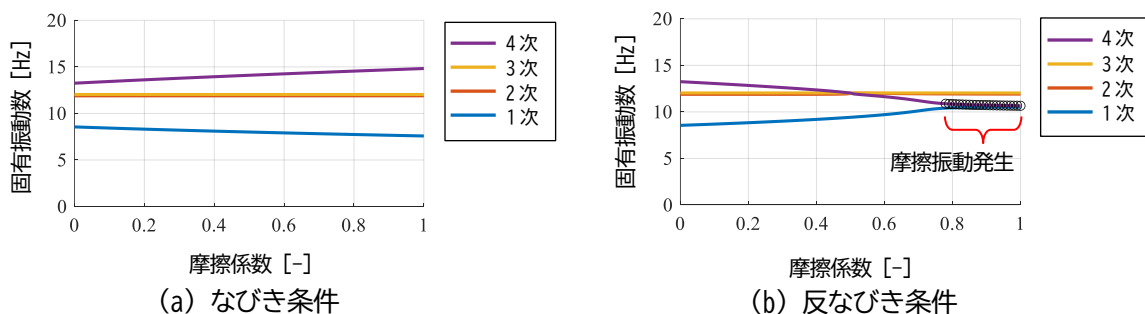


図 3 摩擦係数の変化に対する固有振動数の推移

用だと考えられる。そこで次章では、モード間の連成強度を用いて、モード同士の連成しやすさを定量的に評価する。なお、図3において、2次モードと3次モードの固有振動数は摩擦係数や進行方向によらず近い値を示しているが、4章で述べるようにこれらのモード間の連成強度が低く固有モードの連成が生じないことから、摩擦振動の発生には影響を及ぼさない。

3. 連成強度解析手法

パンタグラフと同様に摩擦振動が課題となるディスクブレーキ鳴きの対策として、FEMモデルを用いた複素固有値解析が適用されている⁸⁾。しかし、解析モデルが複雑であるため、ブレーキ鳴き低減の設計指針を解析結果から得ることが難しい。そのため Chung らは、ブレーキ鳴きが2つの固有モードの連成によって発生することに着目し、 i 次モードと l 次モードの連成の度合いを定量的に解析する方法を連成強度として提案した⁹⁾。本研究では、このブレーキ鳴きに対して提案された連成強度をパンタグラフにおける摩擦振動へ応用することを考え、本章では連成強度解析手法の概要を簡潔に記す。

パンタグラフの自由振動を表す運動方程式を、簡単のために減衰力の項を無視して以下のように表す。

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([K_g] + \mu[K_f])\{x\} = \{0\} \quad (1)$$

ただし、 $[M]$ は質量行列、 $\{x\}$ は変位ベクトルである。また、剛性行列を、摩擦係数を含まない成分 $[K_g]$ と摩擦係数を含む成分 $\mu[K_f]$ に分けて記載している。式(1)をラプラス変換することで次式を得る。

$$([M]s^2 + [K_g] + \mu[K_f])\{X\} = \{0\} \quad (2)$$

変位の複素振幅ベクトル $\{X\}$ をモード座標で記述すると以下のようなになる。

$$\{X\} = [\Phi]\{\xi\} \quad (3)$$

$[\Phi]$ は摩擦力を含まない系の運動方程式(4)に基づく固有ベクトルからなるモード行列、 $\{\xi\}$ はそのモードへの寄与を表すモード寄与ベクトルである。

$$([M]s^2 + [K_g])\{X\} = \{0\} \quad (4)$$

式(3)を式(2)に代入して前から $[\Phi]^H$ を乗じると次式を得る。

$$\left(s^2[I] + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{bmatrix} + \mu[\Lambda_f] \right) \{\xi\} = \{0\} \quad (5)$$

ここで ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$)は i 次の固有角振動数を表す。なお、本報告では固有ベクトルは質量正規ベクトルを仮定する。また、 $[\Lambda_f]$ は以下のとおりである。

$$[\Lambda_f] \equiv [\Phi]^H [K_f] [\Phi] \quad (6)$$

文献 9 において連成強度は、摩擦力が作用しない系の固有値に対する、摩擦力による固有値の変化量として定義される。ただし、固有値は固有角振動数の 2 乗である。そこで、式(4)に示した摩擦力が作用しない系の固有値に対し、式(2)のように摩擦力が作用することによる摂動を 2 次の項まで求めると、式(2)の*i*次モードの固有値 λ_i は次式となる。

$$\lambda_i = \lambda_0 + \mu[\Lambda_f]_{ii} - \mu^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{[\Lambda_f]_{il} \cdot [\Lambda_f]_{li}}{\lambda_l - \lambda_0} \quad (7)$$

本式の右辺第 2 項は、摩擦力による*i*次モードの固有値の変化量を表す。一方、右辺第 3 項は、*i*次モードの固有値が摩擦力によって他の固有モードと連成することで生じる固有値の変化量である。そのため、文献 9 では右辺第 3 項を用いて*i*次モードと*l*次モードの連成強度 CS_{il} を次式で定義している。

$$CS_{il} = \frac{[\Lambda_f]_{il} \cdot [\Lambda_f]_{li}}{\omega_l^2 - \omega_i^2} \quad (i \neq j) \quad (8)$$

ただし、

$$[\Lambda_f]_{il} = \{\phi_i\}^H [K_f] \{\phi_l\} \quad (9)$$

$$[\Lambda_f]_{li} = \{\phi_l\}^H [K_f] \{\phi_i\} \quad (10)$$

である。実機パンタグラフの連成強度解析を行うためには、加振試験に基づいて固有ベクトルと固有振動数を同定した後に、摩擦係数を含む剛性行列 $\mu[K_f]$ を定義した上で式(8)を計算する。

4. FMBD モデルの連成強度解析

本章では、はじめに標準状態における FMBD モデルの連成強度解析を行って、連成が起りやすい固有モードの組み合わせを特定する。次に、FMBD モデルのパラメータ変更の影響について考察する。

4.1 標準状態における FMBD モデルの連成強度解析

2.2 節で行った検討では、1 次と 4 次の固有モードが摩擦力によって連成することがわかった。そこで、1 次～4 次の固有モードに対して連成強度を計算した結果を図 4 に示す。ただし、 $i > l$ については $i < l$ の場合の符号が反転した結果となるため計算を省略した。 $i = 1$ 次と $l = 4$ 次の連成強度（以下、 CS_{14} ）は $-425 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、他のモードの組み合わせと比較して値の絶対値が大きい。また、連成強度が負の値の場合は、摩擦力によって*i*次の固有振動数が大きくなることを意味する。したがって、図 3(b)と同様に 1 次と 4 次の固有モードが連成して摩擦振動が発生する可能性が示される。

4.2 パラメータ変化に対する連成強度の変化

摩擦振動を抑制するために 1 次モードと 4 次モードの固有振動数を変えることを目的として、すり板を連結する板ばねの曲げ剛性を 90%低減し、計算によって得られた 1 次モードから 4 次モードの連成強度を図 5 に示す。曲げ剛性低減後の CS_{14} は $-1.3 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、その絶対値が低下していることから、曲げ剛

性低減が摩擦振動の抑制に有用だと考えられる。また、曲げ剛性低減後の摩擦係数と固有振動数との関係を図 6 に示す。摩擦係数が 1 以下の範囲では摩擦振動が発生しないことから、板ばねの曲げ剛性低減が摩擦振動の低減に寄与することが分かる。なお、板ばねの曲げ剛性を 90 % 増加すると、図 7 に示すように 1 次の固有振動数が上昇して、より低い摩擦係数において摩擦振動が発生するようになったことも、数値解析から確認した。

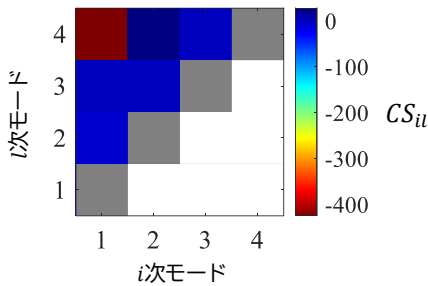


図 4 FMBD モデルの連成強度解析結果 (標準状態)

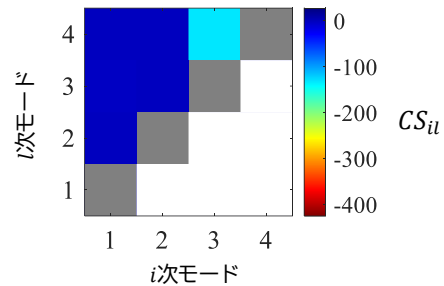


図 5 FMBD モデルの連成強度解析結果 (板ばねの曲げ剛性低減後)

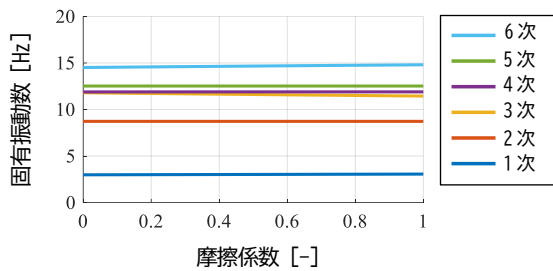


図 6 摩擦係数の変化に対する固有振動数の推移 (板ばねの曲げ剛性低減後)

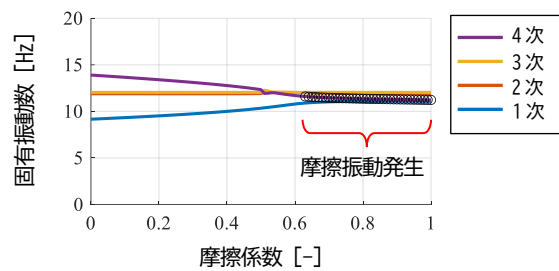


図 7 摩擦係数の変化に対する固有振動数の推移 (板ばねの曲げ剛性増加後)

5. ハンマリング試験によるパンタグラフの連成強度解析

本章では、はじめに標準状態におけるパンタグラフの連成強度解析を行って、摩擦力によって連成が起りやすい固有モードの組み合わせを特定する。次に、すり板を連結する板ばねの曲げ剛性を低減するために薄板化した場合の連成強度解析を行うことで、安定性と連成強度との関係について考察する。

5.1 試験方法

鉄道総研が所有するパンタグラフ加振装置に実機パンタグラフを仮設し、図 8 に示すようにすり板上面を加振装置先端に押し付けることで、すり板上面の固定を行った。これは、式(4)に示すように、すり板と架線が接触した状態における固有ベクトルを用いて連成強度を計算するためである。なお、加振装置とすり板間の摩擦の影響を排除するために、両者の間に自由に回転する 1 個の球を備えたポールローラを取り付けた。

本試験では図 9 に示すように、すり板上面の加振点付近に鉛直方向に感度を有する加速度計を取り付けた。また、マックスウェルの相反定理を用いることで、加速度計の取り付け点を加振点として扱い、インパルスハンマによる加振位置を加速度計測点として扱うことで、限られた加速度計で多点の周波数応答関数 (Frequency Response Function, 以下 FRF) を取得した。加速度計取り付け位置と加振位置は図 10 に示すと

おりである。インパルスハンマを用いた加振は鉛直方向に対して行った。ただし、舟体中央付近である図10の加振位置①については、鉛直方向に加えて前後方向に対する加振も行った。これは、連成強度を計算するためには、式(2)のように摩擦力が作用する水平方向自由度の固有ベクトルも必要なためである。

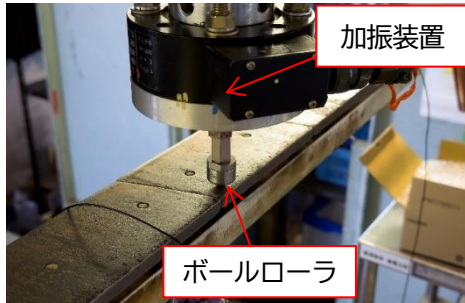


図8 すり板上面の支持方法

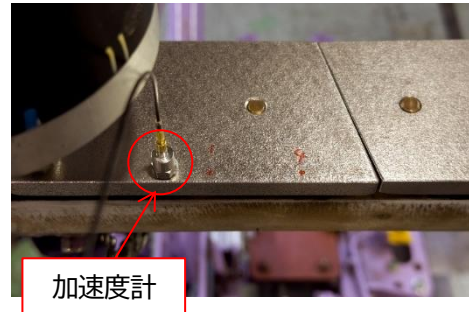


図9 すり板への加速度計取り付け方法

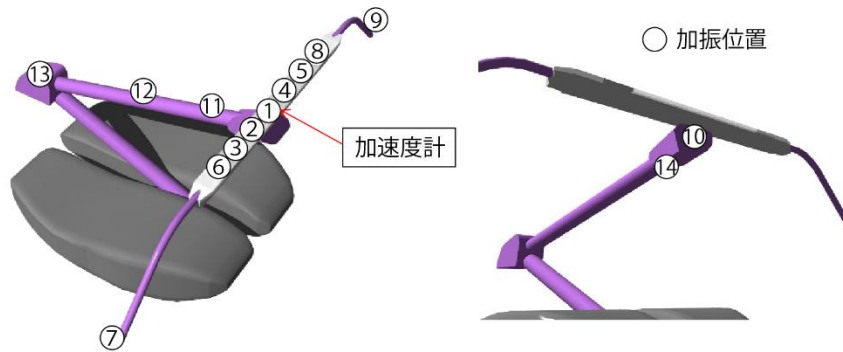


図10 加速度計取り付け位置と加振点の概要図

5.2 標準状態における連成強度解析

5.2.1 モード特性同定

はじめに、測定したFRFに基づいて、一般粘性減衰系を仮定した周波数領域のモード特性同定手法である偏分反復法¹⁰⁾を用いてモード特性同定を行った。偏分反復法では、固有モードの数およびモード特性の初期値を与え、FRFを初期値のモード特性のまわりでテーラー展開することによって非線形項を線形化し、モード特性の変更量を求める。本報告では非線形項のうち固有振動数の初期値は、FRFのパワーとFRF実部のパワーの比を表すMode Indicator Function¹¹⁾(以下、MIF)を用いて推定し、モード減衰率の初期値はモード減衰比を1%と仮定して求めた。線形項の初期値は、非線形項の初期値を用いて最小二乗法により求めた。偏分反復法では、これらの初期値に基づいて線形項を最小二乗法で同定し、非線形項をFRFの測定値と、その理論値との誤差が最小となるように繰り返し計算を行うことで同定する。

ここでは、10 Hz から 30 Hz までの周波数範囲におけるFRFを用いてモード特性同定を行った。本試験で測定したFRFのコヒーレンスは、10 Hzより低い周波数では10 Hz以上と比較して値が低いことからモード特性同定の対象周波数に含めると約15 Hzまでのモード特性同定精度が低下したため、下限周波数を10 Hzとした。また、上限周波数については、文献6において摩擦振動が発生する周波数が約12 Hzであることが示されており、この周波数から約2倍の余裕をみて30 Hzまでとした。固有振動数においてはMIFが極小値を示すことから、図11に示すMIFを参考にするとともに偏分反復法によるモード特性同定を試行錯誤的に繰り返すことで、同図中に丸印で示すように9個の固有モードに関する固有振動数の初期値を得た。

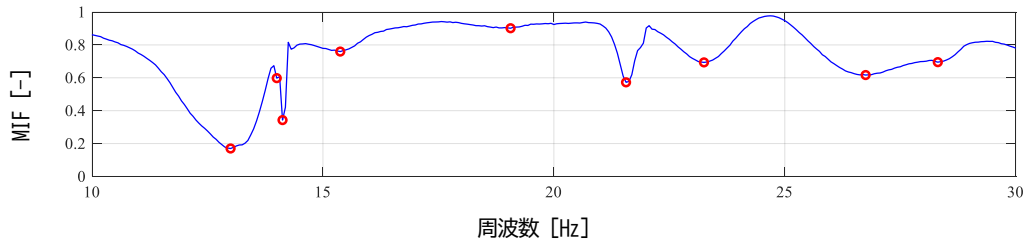


図 11 実機パンタグラフ（標準状態）の FRF に関する MIF
（赤い丸印は固有振動数の初期値に対応する MIF）

5.2.2 連成強度解析結果

同定された 9 個の固有モードのうち、FRF のゲインが比較的大きく、なおかつ振動挙動を把握することができた 4 個の固有モードを用いて連成強度解析を行った。これら 4 個の固有モードの振動数と主体的な振動挙動を表 1 にまとめる。また、得られた連成強度を図 12 に示し、連成しやすい固有モードの組み合わせについて、連成強度の絶対値が上位 3 つの結果を表 2 に示す。4 個の固有モードの主体的な振動挙動は表 1 に示すとおりであるが、いずれのモードもこれらの挙動に加えてすり板の鉛直方向変位も比較的大きく生じていた。したがって、これらの結果よりすり板の振動が固有モード同士の連成に与える影響が大きいため、摩擦係数による固有モード同士の連成を予防するためには、すり板を連結する板ばねの曲げ剛性低減が有用であることが示唆された。

表 1 連成強度解析に用いた固有モードの振動挙動（標準状態）

次数	振動数	振動挙動
2 次	13.1 Hz	全体の上下振動
4 次	14.1 Hz	すり板の上下振動
6 次	21.8 Hz	平衡リンクの上下振動
9 次	28.8 Hz	すり板の前後振動

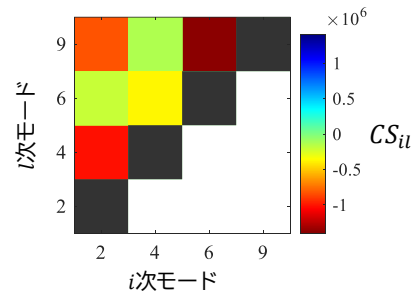


図 12 実機パンタグラフの連成強度解析結果（標準状態）

表 2 連成しやすい固有モードの組み合わせ（標準状態）

順位	固有モードの組み合わせ	連成強度
1	6 次・9 次	-1.3×10^6
2	2 次・4 次	-9.9×10^5
3	2 次・9 次	-8.1×10^5

5.3 板ばねの曲げ剛性低減後の連成強度解析

5.3.1 モード特性同定

すり板同士を連結する板ばねを薄板化することで曲げ剛性を低減したパンタグラフの加振試験を 5.1 節で述べた試験方法に基づいて行い、測定した FRF を用いてモード特性同定を行った。本試験で測定した FRF のコヒーレンスは 5 Hz 以上において 0.9 以上の値を示したため、ここでは 5 Hz から 30 Hz までの周波数範囲における FRF を用いてモード特性同定を行った。図 13 に示す MIF を参考にするとともに偏分反復法によるモード特性同定を試行錯誤的に繰り返すことで、同図中に丸印で示すように 14 個の固有モードに関する固有振動数の初期値を推定し、これに基づいてモード特性同定を行った。

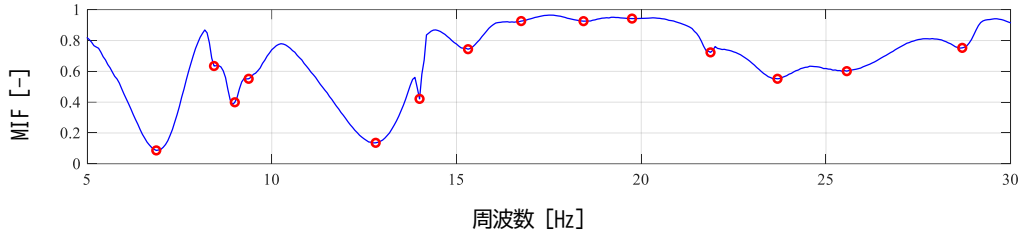


図 13 実機パンタグラフ（板ばね薄板後）の FRF に関する MIF
（赤い丸印は固有振動数の初期値に対応する MIF）

5.3.2 連成強度解析結果

同定された 14 個の固有モードのうち、FRF のゲインが比較的大きく、振動挙動を把握することができた 4 個の固有モードを用いて連成強度解析を行った。これら 4 個の固有モードの振動数と主体的な振動挙動を表 3 に示す。なお、板ばねの薄板化による固有振動数の変化に伴い、表 1 と表 3 における各固有モードの振動挙動は同一であるものの、その次数は変化が生じ互いに異なることに注意されたい。得られた連成強度を図 14 に示し、各固有モードの組み合わせにおける連成強度を標準状態の連成強度と比較して表 4 に示す。これらの結果より、板ばねを薄板化することで、すべてのモード次数における連成強度の絶対値が低くなり、摩擦係数による固有モード同士の連成が生じにくくなったことがわかる。

表 3 連成強度解析に用いた固有モードの振動挙動（板ばね薄板化後）

次数	振動数	振動挙動
1 次	7.1 Hz	全体の上下振動
7 次	14.0 Hz	すり板の上下振動
10 次	21.9 Hz	平衡リンクの上下振動
14 次	29.1 Hz	すり板の前後振動

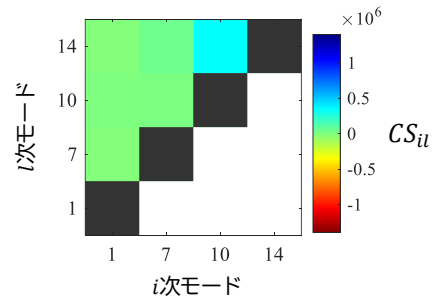


図 14 実機パンタグラフの連成強度解析結果（板ばね薄板化後）

表 4 連成しやすい固有モードの組み合わせ（板ばね薄板化後）

順位	固有モードの組み合わせ	連成強度	
		板ばね薄板化後	標準状態
1	板ばね薄板化後の 10 次・14 次（標準状態の 6 次・9 次）	3.3×10^5	-1.3×10^6
2	板ばね薄板化後の 1 次・7 次（標準状態の 2 次・4 次）	-4.3×10^2	-9.9×10^5
3	板ばね薄板化後の 1 次・14 次（標準状態の 2 次・9 次）	-2.5×10^3	-8.1×10^5

6. 高速パンタグラフ試験装置を用いた摩擦振動対策効果の検証

薄板化した板ばねを取り付けた実機パンタグラフを用いて、図 15 に示すように高速パンタグラフ試験装置においてしゅう動実験を行った。本実験は 2.2 節において摩擦振動の発生が認められた反なびき条件で実施し、二分力計を用いた摩擦係数の測定を行った。本報告ではパンタグラフに離線が生じてパンタグラフとトロリ線に周期的な衝突振動が形成される状態を不安定な状態、それ以外を安定な状態と定義する。本実験では、高速パンタグラフ試験装置に備え付けの離線測定装置により、パンタグラフの離線を把握し

た。離線測定装置は、パンタグラフが回転円盤から離れたとき（離線したとき）に約8V、パンタグラフが円盤に着線しているときに約0Vの電圧信号（以下、離線信号）を出力する。離線信号が閾値である4V以上の場合を離線とみなして離線の判定を行った。摩擦振動は主に低速走行時に発生することが知られているため、本実験の回転円盤の周速度は、当該試験装置の最低周速度である5 km/hとした。

本実験で測定した摩擦係数と離線判定結果の時刻歴波形の一例を図16に示す。図16(b)に示すように、板ばね薄板化後の摩擦係数は0.5~0.9であるが、衝突振動が発生するような摩擦振動は認められず、6回繰り返し実施したしゅう動実験では、すべての実験においてパンタグラフは安定的にしゅう動していた。本結果より、板ばねの薄板化によって摩擦振動が抑制されたことがわかり、連成強度解析に基づく摩擦振動対策の有効性が示された。

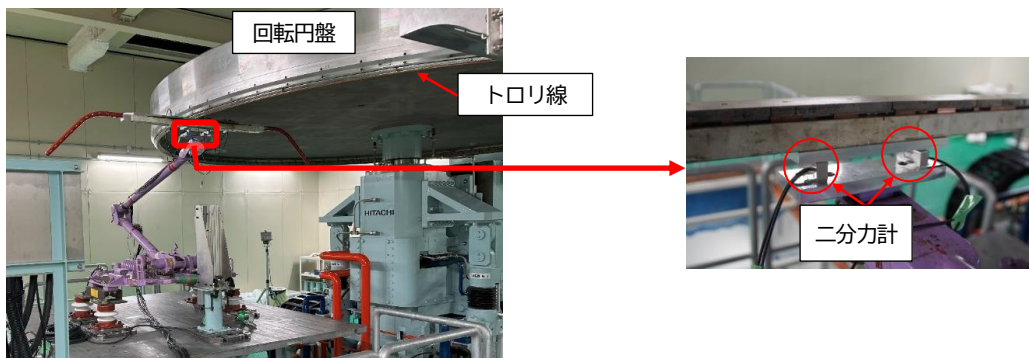


図15 高速パンタグラフ試験装置における低速しゅう動実験の様子

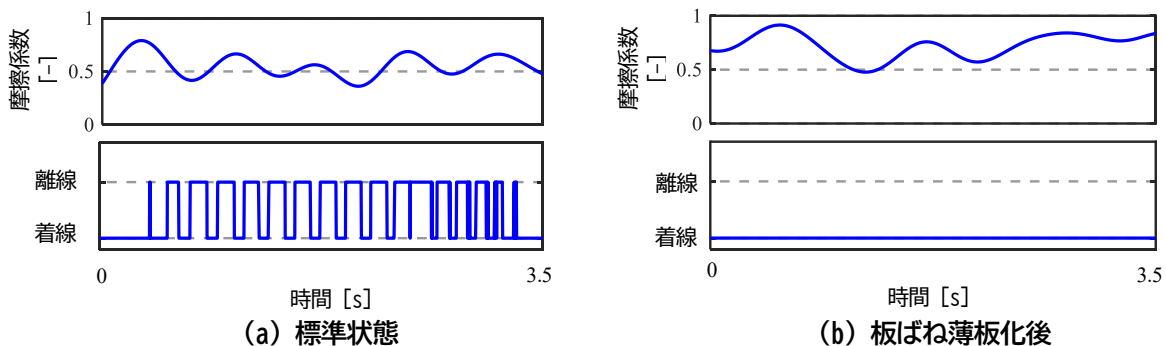


図16 高速パンタグラフ試験装置における低速しゅう動実験結果

7. まとめ

本報告では、パンタグラフのFMBDモデルおよび実機を用いて、しゅう動摩擦に伴う固有モードの変化およびモード間の連成について解析を行った。摩擦係数の変化による固有振動数の変動や、摩擦力によって異なる固有モード同士が連成する度合いを示す連成強度を指標として、各モード間の連成を定量的に評価した。また、連成強度の感度解析を通じて、摩擦振動の低減に有効な構造パラメータの抽出を行った。

本解析から得られた主な知見は以下のとおりである。

- ・ FMBDモデルを用いた解析により、摩擦係数の増加に伴い1次モードと4次モードの固有振動数の差が、なびき条件では拡大し摩擦振動は発生しないが、反なびき条件では近接し、摩擦係数が0.79以上となる場合に摩擦振動が生じることが明らかになった。

- ・ モード間の連成を定量的に示す連成強度を評価した結果、1次モードと4次モードの組み合わせにおいて高い連成強度が確認され、摩擦による不安定性の要因となっていることが示唆された。
- ・ 板ばねを薄板化した実機パンタグラフの連成強度の絶対値が低下することを加振試験により確認した。さらに、高速パンタグラフ試験装置を用いたしゅう動実験により、板ばねを薄板化することで摩擦振動が抑制されることが確認され、連成強度解析に基づく摩擦振動対策の有効性が示された。ただし、板ばねの薄板化を実機に適用する際は、板ばねやそれに付随する各種構成要素の疲労強度や耐久性について、使用条件を考慮した十分な検討を行う必要がある。

文献

- 1) 根本公紀, 久保田喜雄: 銅合金トロッコ線と鉄系焼結合金すり板の摩擦・摩耗に及ぼすしゅう動速度の影響, 第26回鉄道技術連合シンポジウム (J-RAIL2019) 講演論文集, No.S7-4-2, pp.570-573, 2019
- 2) 坂本真彦, 加来洋成, 鈴木優太: ED76形式パンタグラフのピッチング対策, 日本鉄道車両機械技術協会, R&m2012年5月号, pp.55-59, 2012
- 3) 牧野秀臣, 樋口芳久: トロッコ線とパンタグラフすり板, 電気鉄道, Vol.28, No.9, pp.15-18, 1974
- 4) 天野佑基, 小林樹幸: しゅう動摩擦が作用するパンタグラフのFMBDを用いたモデリングと安定性解析, D&D2022 講演論文集, Vol.2022, p.123, <https://doi.org/10.1299/jsmedmc.2022.123>, 2022
- 5) 小山達弥: 高速パンタグラフ試験装置の開発, 鉄道総研報告, Vol.35, No.9, pp.5-10, 2021
- 6) Amano, Y., Kobayashi, S., and Yabuno, H., et al., "Mechanism and suppression of friction-induced vibration in catenary-pantograph system", Nonlinear Dynamics, Vol. 112, pp.14959-14980, 2024, <https://doi.org/10.1007/s11071-024-09802-6>.
- 7) 小林樹幸, 天野佑基, 山下義隆: しゅう動摩擦によるパンタグラフの固有モード連成強度解析, D&D2025 講演論文集, OS3-3-1-02, 2025
- 8) Millner, N., "An analysis of disk brake squeal", SAE Technical Paper, No.780332, 1978.
- 9) Chung, C.H., Steed, W., and Kobayashi, K., et al., "A New Analysis Method for Brake Squeal Part I: Theory for Modal Domain Formulation and Stability Analysis", SAE Technical Paper, 2001-01-1600, pp.2033-2039, 2001.
- 10) 長松昭男: モード解析, 培風館, pp.124-126, 1990
- 11) Breitbach, E.J., "A Semi-Automatic Modal Survey Test Technique for Complex Aircraft and Spacecraft Structures", Proceedings of 3rd ESA Testing Symposium, 519-528, 1973.