

鉄道橋りょう・高架橋群を対象とした 下部工単体の固有振動数同定法

和田 一範* 坂井 公俊*

Natural Frequency Identification Method for a Substructure in Railway Bridges and Viaducts

Kazunori WADA Kimitoshi SAKAI

We have proposed a method to identify the natural frequency of a single structure from data obtained by measuring the vibration of railway bridges and viaducts. In the method, the natural frequency of a single structure can be theoretically calculated by using undamped natural frequencies and natural modes of a whole structure. The eigenvalue analysis was performed, and it was shown that the natural frequency of a single structure can be identified by the proposed method.

キーワード：下部工，固有振動数，同定，鉄道橋りょう・高架橋

1. はじめに

鉄道橋りょう・高架橋は，上部工（桁）や支承を介して複数の下部工（ラーメン高架橋の場合は，スラブ～基礎部を下部工と表記）が連続した群を構成しているため，振動計測から得られる固有振動数などの振動特性は，隣接構造物の振動の影響を含んだ構造全体系としての値である。これは，道路橋を対象とした橋脚単体と構造全体系の実測比較¹⁾や鉄道構造物群の連成に関する実測および解析的検討²⁾の事例を見ても明らかである。

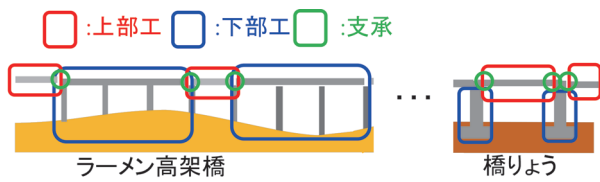
振動計測で得られる構造全体系の振動特性は，構造物の健全性判断に活用されてきた。特に鉄道分野では，橋りょう・高架橋の着目構造に衝撃加振を行い，得られる波形から構造全体系の固有振動数を評価して，下部工単体の健全性を評価する衝撃振動試験³⁾⁴⁾が長年に亘り活用されている。下部工の損傷や安定性の低下は，構造全体系の固有振動数の低下を招くため，この衝撃振動試験は有効な非破壊検査法の1つといえる。その一方で，隣接する構造物の違いによっては，局所的な下部工の損傷が構造全体系の固有振動数の変化に与える影響が限定的となり，下部工単体の特性を明瞭に評価できない場合も考えられる。そのため，下部工単体の固有振動数を直接評価できるようになれば，より正確に健全性を判断できる可能性がある。

計測結果に基づく構造全体系の振動特性把握，下部工単体としての剛性把握といった事柄は，システム同定と呼ばれる。システム同定には，モードの固有振動数，減衰定数，モード形状等の構造のモーダルパラメータを同定するもの⁵⁾などと，質量，剛性，減衰のような構造を構

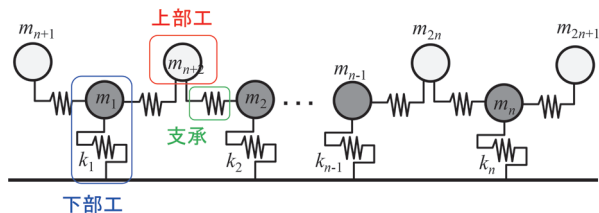
成する物理量（物理パラメータ）を同定するもの^{6)~10)}に大別されるが，本稿で着目するのは後者である。物理パラメータを同定する手法には，時間領域で同定する手法と周波数領域で同定する手法があり，土木・建築の分野などで様々な検討がなされてきた。時間領域の同定手法の検討事例を挙げると，ニューラルネットワークを用いた研究⁶⁾，地震観測記録から最小二乗法で同定する方法⁷⁾などがある。一方で，周波数領域の同定手法の検討事例としては，1次固有値の制約条件下での重み付き剛性と最小設計問題の解に基づく検討⁸⁾，粘性減衰機構のモデルを対象とした理論的検討⁹⁾，伝達関数の静的な極限值を利用した手法¹⁰⁾などがある。これらの研究はどれも建築構造を想定した多層構造もしくは土木構造であっても1自由度のばねマスモデルを基としている。鉄道のような連続する橋りょう・高架橋群は，後述するように地盤結合する質点が複数存在し，支配方程式が既往研究と異なりより複雑となるが，その問題を対象に物理パラメータを同定する研究はこれまで十分になされていない。

そこで著者は，上部工，支承を介して複数の上部工・下部工が連続した橋りょう・高架橋群（図1(a)）をばねマスモデル（図1(b)）で表現し，振動計測等のデータから下部工単体の剛性に直接関係する下部工単体の固有振動数を同定する手法を開発した¹¹⁾。提案手法は，自由振動問題を対象にした理論的検討から導出される周波数領域での同定手法である。本手法が確立すれば，例えば地震や河川橋脚における洗掘等で下部工の健全性低下が疑われる場合に，下部工単体の固有振動数を新たな健全度判定の指標に用いることで，衝撃振動試験³⁾⁴⁾の判定指標（全体系の1次固有振動数）よりも直接的かつ正確に下部工の健全度を判断できる可能性がある。本稿で

* 鉄道地震工学研究センター 地震応答制御研究室



(a) 対象とする橋りょう・高架橋



(b) 検討するばねマスモデル

図1 対象とする構造物およびモデルのイメージ

は、文献11の一部に示されている下部工単体の固有振動数の同定法に関する理論展開および数値解析による妥当性の検証について述べる。

2. 下部工単体の固有振動数同定法の提案

本章で述べる理論展開は下記前提条件のもと行う。

- ・橋りょう・高架橋群は弾性挙動をする。
- ・剛性の振動数依存性は考慮しない。
- ・減衰は Rayleigh 減衰等の比例減衰型の特性を持つ。
- ・モデル境界は、設計振動単位¹²⁾の考えを準用し、モデル範囲外の上部工質量の半分を考慮した自由端とする。

2.1 下部工1基の場合

2.1.1 非減衰系の場合

起終点の上部工を有する下部工1基の3自由度系が自由振動している状態を考える(図2)。下部工の質量を m_1 、剛性を k_1 とし、起点の上部工質量を m_2 、支承を介した連成ばね剛性を k_{12} 、終点の上部工質量を m_3 、支承を介した連成ばね剛性を k_{13} 、各質点の振動の変位波形を $x_1 \sim x_3$ とする。ここで、質量 $m_1 \sim m_3$ は設計図書等から全質量を把握したうえで、振動に寄与するだけ質量(等価質量の考え方¹³⁾)に応じて算定可能である。また、

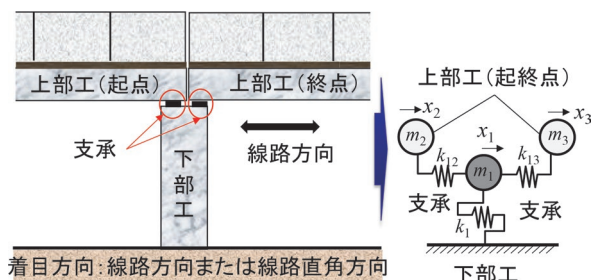


図2 下部工1基の自由振動問題

変位波形 $x_1 \sim x_3$ は振動計測を行い、変位計で取得するか、もしくは速度計や加速度計を用いてその微分形 ($\dot{x}_1 \sim \dot{x}_3$ や $\ddot{x}_1 \sim \ddot{x}_3$) を取得して把握できる。この条件下で、剛性 k_1, k_{12}, k_{13} を同定する問題を考える。

この問題の運動方程式は次式で表せる。

$$M_3 \ddot{X}_3 + K_3 X_3 = 0 \quad (1a)$$

$$X_3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (1b)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} + k_{13} & -k_{12} & -k_{13} \\ -k_{12} & k_{12} & 0 \\ -k_{13} & 0 & k_{13} \end{bmatrix} \quad (1c)$$

各変位の振幅 $r_1 \sim r_3$ 、固有円振動数 ω および位相角 ϕ を用いて、上式の一般解は下記ようになる。

$$X_3 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} e^{\pm i(\omega t + \phi)} \quad (2)$$

式(2)を式(1a)に代入し、任意の時刻について成立する条件を考慮すると、下式が成り立つ。

$$(K_3 - \omega^2 M_3) \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、式(3)が非自明解を持つための必要十分条件から、 $\omega = \omega_j (j=1, 2, 3, j$ 次の固有円振動数) が求まる。2行目の式を整理すると次式となる。

$$k_{12} = \frac{m_2 \omega^2 R_2}{R_2 - 1}, R_2 = \frac{r_2}{r_1} \quad (4)$$

全く同様の手順で式(3)の3行目の式を整理すると、

$$k_{13} = \frac{m_3 \omega^2 R_3}{R_3 - 1}, R_3 = \frac{r_3}{r_1} \quad (5)$$

となる。ここで、 R_2, R_3 は下部工の振幅を1としたときの上部工の振幅を表す。

さらに、式(4)、(5)を式(3)の1行目に代入して整理すると、

$$k_1 = (m_1 + R_2 m_2 + R_3 m_3) \omega^2 \quad (6)$$

となる。ここで、上式の意味をイメージするために極端な2例として以下を考える。

・ $k_{12}=k_{13}=0$ (連成ばね剛性0)

・ $k_{12}=k_{13}=\infty$ (連成ばね剛性無限大)

$k_{12}=k_{13}=0$ のとき式(4), (5)より $R_2=R_3=0$, 即ち $r_2=r_3=0$ となる。これは、上部工が変位せず下部工に何も影響を与えない状況であり、上部工が載っていない状況と等価といえる。このとき、式(6)より $k_1=m_1\omega^2$ となり、下部工剛性・質量だけの1自由度系に帰着される。一方で、 $k_{12}=k_{13}=\infty$ のときは、式(4), (5)より $R_2=R_3=1$, 即ち $r_1=r_2=r_3$ がいえる。これは、上部工と下部工が完全に一体挙動している状況であり、設計振動単位での取り扱い方に相当する。このとき、式(6)より $k_1=(m_1+m_2+m_3)\omega^2$ となり、上部工質量を付加した状況での1自由度系に帰着される。

2.1.2 減衰系の場合

減衰を考慮した場合、復元力項と同じ符号で速度に比例する減衰項が追加される。そのため、運動方程式は下式となる。

$$M_3\ddot{X}_3 + C_3\dot{X}_3 + K_3X_3 = 0 \quad (7a)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} + c_{13} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{12} & c_{12} & 0 \\ -c_{13} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \quad (7b)$$

本稿では、比例減衰型の減衰を扱っており、その条件下では固有モードが非減衰の場合と同じ実数となるため、上記の一般解は次式となる。

$$X_3 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} e^{\lambda t \pm i\phi}, \lambda = -\sigma \pm i\omega_D \quad (8)$$

ここで、 λ は固有値であり、全体系の減衰固有円振動数 ω_D とモード減衰定数 σ で表される。

式(8)を式(7a)に代入し、任意の時刻について成立する条件を考慮すると、下式が成り立つ。

$$(\lambda^2 M_3 + \lambda C_3 + K_3) \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式(9)の2行目に着目して整理すると、 $R_2=r_2/r_1$ として、

$$(-c_{12}\lambda - k_{12}) + (m_2\lambda^2 + c_{12}\lambda + k_{12})R_2 = 0 \quad (10)$$

となる。上式を実部、虚部に分けて整理すると、

$$\begin{aligned} & [(R_2-1)k_{12} - (R_2-1)\sigma c_{12} + R_2m_2(\sigma^2 - \omega_D^2)] \\ & + i[\pm(R_2-1)\omega_D c_{12} \mp 2m_2\sigma\omega_D R_2] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

上式が成立するには、実部=虚部=0が必要となるため、次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} R_2-1 & -\sigma(R_2-1) \\ 0 & \omega_D(R_2-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{12} \\ c_{12} \end{Bmatrix} = m_2R_2 \begin{Bmatrix} \omega_D^2 - \sigma^2 \\ 2\sigma\omega_D \end{Bmatrix} \quad (12)$$

上記連立方程式を解くことで、連成ばね剛性 k_{12} および減衰係数 c_{12} が次式で求まる。

$$\begin{Bmatrix} k_{12} \\ c_{12} \end{Bmatrix} = \frac{m_2R_2}{R_2-1} \begin{Bmatrix} \omega_D^2 + \sigma^2 \\ 2\sigma \end{Bmatrix} \quad (13)$$

また、式(9)の3行目について全く同じ計算ができるので、連成ばね剛性 k_{13} および減衰係数 c_{13} が求まる。

$$\begin{Bmatrix} k_{13} \\ c_{13} \end{Bmatrix} = \frac{m_3R_3}{R_3-1} \begin{Bmatrix} \omega_D^2 + \sigma^2 \\ 2\sigma \end{Bmatrix}, R_3 = \frac{r_3}{r_1} \quad (14)$$

次に式(9)の1行目に着目し、実部=0、虚部=0の条件を適用すると、

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = (m_1 + R_2m_2 + R_3m_3) \begin{Bmatrix} \omega_D^2 + \sigma^2 \\ 2\sigma \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで、減衰行列を比例減衰型と仮定しているため、減衰固有円振動数 ω_D およびモード減衰定数 σ は、非減衰固有円振動数 ω と減衰定数 h を用いて、次式で表せる。

$$\sigma = h\omega, \omega_D = \omega\sqrt{1-h^2} \quad (16)$$

上式を式(13)~(15)に代入すると、

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = (m_1 + R_2m_2 + R_3m_3) \begin{Bmatrix} \omega^2 \\ 2h\omega \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{12} \\ c_{12} \end{Bmatrix} = \frac{m_2R_2}{R_2-1} \begin{Bmatrix} \omega^2 \\ 2h\omega \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{13} \\ c_{13} \end{Bmatrix} = \frac{m_3R_3}{R_3-1} \begin{Bmatrix} \omega^2 \\ 2h\omega \end{Bmatrix} \quad (19)$$

となり、 k_1, k_{12}, k_{13} が非減衰の解(式(4)~(6))と一致することがわかる。即ち、非減衰固有円振動数を用いれば、減衰振動問題における解も非減衰振動問題と同じ式で表現できることがわかる。なお、式(17)の k_1 は文献

8で示される多層構造のせん断ばねマスモデルでの剛性の算定式と同様の形をしている。

2.2 下部工が2基以上の場合

上部工、支承を介して2基の下部工が連結された減衰自由振動問題を考える(図3)。この問題の運動方程式は下記となる。

$$M_5 \ddot{X}_5 + C_5 \dot{X}_5 + K_5 X_5 = 0 \quad (20)$$

上式の一般解は式(8)と同様に下記の形で表せる。

$$X_5 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{Bmatrix} e^{\lambda t \pm i\phi}, \lambda = -\sigma \pm i\omega_D \quad (21)$$

運動方程式に上記調和振動解を代入して整理すると、下式となる。

$$\sum_{i=1}^2 (\lambda C_i + \Omega_i^2) M_i R_i = -\lambda^2 \sum_{i=1}^5 M_i R_i \quad (22)$$

ここで、 j : 着目下部工の添え字(ここでは1)として、

$$C_i = \frac{c_i}{m_i}, \Omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}, M_i = \frac{m_i}{m_j}, R_i = \frac{r_i}{r_j} \quad (23)$$

とする。なお、 Ω_i は下部工*i*単体の固有円振動数に相当する。式(22)について実部=虚部=0の条件を適用すると、

$$\sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 M_i R_i = \omega^2 \sum_{i=1}^5 M_i R_i \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^2 C_i M_i R_i = 2\sigma \sum_{i=1}^5 M_i R_i \quad (25)$$

となる。ここで、 ω は非減衰固有円振動数である。式(24)

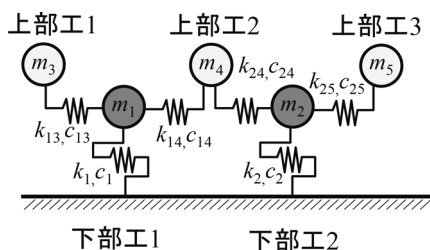


図3 下部工2基の自由振動問題

を確認すると、 Ω_1, Ω_2 を1つの式で表していることがわかる。本稿では、剛性の振動数依存性は考慮していないため、2種類の非減衰固有円振動数 ω および固有モードベクトル(R_i)を代入すれば Ω_1, Ω_2 を一意に求めることができる。ちなみに本稿の主題ではないが、仮に各固有モードに対応するモード減衰定数 σ_i が算定できれば、式(25)から個々の減衰係数に関連する物理量 C_i を算定することも可能である。

一般に*n*基の下部工で構成されるばねマスモデル(図1(b))では、先と同じ議論ができ、式(24)と同様に、

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i^2 M_i R_i = \omega_j^2 \sum_{i=1}^{2n+1} M_i R_{ji} \quad (26)$$

と表記することができる。なお以降の考察の都合も踏まえ、式(26)は*j*次モードに関するものであると添え字を加えて明記した。未知数が Ω_i ($i=1, 2, \dots, n$)の*n*個であるため、*n*組の非減衰固有円振動数 ω_j と固有モード R_{ji} があれば一意に Ω_i を決めることができる。

なお、 $n=1$ のとき $R_{11}=M_1=1$ であることを踏まえると、式(26)は下部工1基の式(17)に一致するため、本式は一般性のある式といえる。

2.3 下部工単体の固有振動数同定法の活用方法

下部工の損傷や安定性の低下などによる健全性の低下は、ばねマスモデルにおいては下部工の剛性低下、即ち下部工単体の固有円振動数の低下を意味する。そこで、下部工単体の固有振動数を新たな健全度判定の指標に用いれば、衝撃振動試験³⁾⁴⁾の判定指標(全体系の1次固有振動数)よりも直接的かつ正確に下部工の健全度を判断できる可能性がある。

ここでは提案手法の具体的な活用例として、下部工単体の固有振動数を用いた健全度判定の手順を示す。

- ・下部工単体の固有振動数の初期値 F_0 を把握する。新設構造については、建設中の上部工が載っていない状態で振動計測を実施すれば最も正確な値が得られる。既設構造物については、下部工、上部工を含めた複数箇所での振動計測を実施し、全体系の固有振動数や固有モードを算定し、式(26)から同定することができる。
- ・下部工の健全性低下が疑われるとき(地震や河川橋脚における洗掘等)、再度振動計測を実施し、式(26)から下部工単体の固有振動数 F を同定する。
- ・ F と F_0 を比較し、顕著な変化(F_0 に比べて F が低下)が見られた場合、下部工の健全性低下と判定する。

上記は異常時の健全度判断を想定しているが、常時モニタリングのような下部工単体の固有振動数の経年変化を把握することも可能である。なお、振動計測結果から全体系の固有振動数や固有モードを算定する方法は、卓越

振動数におけるフーリエ振幅比とフーリエ位相差を活用する方法や、FDD (Frequency Domain Decomposition) 法¹⁴⁾ を活用する方法などがある。

2.4 実際の鉄道橋りょう・高架橋へ活用する場合の注意点

2.4.1 M_i, R_{ji} の基準点について

式 (23), (26) の形からわかるように、質量比 M_i や固有モード R_{ji} の基準となる質点ほどの点を活用しても良い。また質量比については、設計図書等から得られる実質量を基に振動に寄与するだけ質量 (等価質量の考え方¹³⁾) に応じて評価すればよい。

2.4.2 非減衰固有円振動数の算定について

実測で取得できる波形をフーリエ変換して得られる卓越振動数は、厳密には減衰固有振動数に一致するはずである。しかし、式 (26) より必要な物理量は非減衰固有円振動数なので、その算定について述べる。

1 次モードを例にとると、減衰 1 次固有円振動数と非減衰 1 次固有円振動数の差 $\Delta\omega_1$ は、

$$\Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_{D1} = (1 - \sqrt{1 - h^2}) \omega_1 \quad (27)$$

となり、振動数表現で記載すると、次式となる。

$$\Delta f_1 = (1 - \sqrt{1 - h^2}) \frac{f_1}{2\pi} \quad (28)$$

ここで、減衰定数 h は通常数 % ~ 20% 程度であり、固有振動数 f_1 は数 Hz ~ 10 Hz 程度である。

次に、実測の計測時間を t_N (s) とすると、収録波形をフーリエ変換したときの振動数刻み幅 Δf は次式となる。

$$\Delta f_1 = \frac{1}{t_N} \quad (29)$$

通常の振動計測でフーリエ変換するひとかたまりの計測時間 t_N (s) は数十秒程度、サンプリング周波数は 100 ~ 1000 Hz 程度である。 Δf_1 や Δf の例を表 1 に示す。表中において、 N はデータ数、 f_s はサンプリング周波数である。取りうる値の範囲の目安を知るために Δf_1 や Δf が比較的小さくなる場合と比較的大きくなる場合の条件で算定した。ここで、波形処理は高速フーリエ変換の活

用を想定するためデータ数 $N = f_s \times t_N$ が 2 の累乗となるような計測時間としている。本表より、 Δf_1 が比較的大きい条件である減衰定数が 20% で非減衰固有振動数が 10 Hz の構造物を Δf が比較的小さくなる条件であるサンプリング周波数 1000 Hz で 65.536 s 計測した場合によりやく Δf_1 と Δf が同じオーダーとなることがわかる。このことから減衰固有振動数と非減衰固有振動数の差異は非常に小さく、通常の計測精度で得られる刻み幅では区別できない程度であることがわかる。すなわち、実務上はフーリエ振幅スペクトルの卓越振動数をそのまま非減衰固有振動数と判定しても差し支えないといえる。

2.4.3 固有モードの算定について

下部工 2 基 (5 自由度) の場合を例にとり、式 (26) に j 次モードと k 次モードの値を代入すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & M_2 R_{j2} \\ 1 & M_2 R_{k2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_j^2 (1 + M_2 R_{j2} + M_3 R_{j3} + M_4 R_{j4} + M_5 R_{j5}) \\ \omega_k^2 (1 + M_2 R_{k2} + M_3 R_{k3} + M_4 R_{k4} + M_5 R_{k5}) \end{Bmatrix} \quad (30)$$

となる。ここで式 (23) の定義より $R_{j1} = R_{k1} = M_1 = 1$ となることを利用している。

この連立方程式が一意に解けるためには、左辺の行列式 $= M_2 (R_{k2} - R_{j2}) \neq 0$ が必要十分条件となる。これは、 k 次モードと j 次モードにおける下部工 1 と下部工 2 の振幅比が異なることを意味する。一般に n 基の下部工の場合でも同様の議論ができ、下部工のみに着目したときのモード形状が異なる n 個のモードを選択しないと、式 (30) が一意には解けず、下部工単体の固有振動数が算定できない。

3. 数値解析に基づく手法の検証

本章では、2 章で理論展開を基に提案した手法の妥当性を数値解析により検証する。具体的には、下部工 1 基の場合と 3 基の場合を例にとり、数値解析から得られる固有振動数や固有モードを基に提案手法を適用して、下部工単体の固有振動数を同定し、解析モデルの設定値 (正解値) との比較を行う。また、本章で扱う数値解析モデルの設定値は、実際の鉄道橋りょう・高架橋の諸元とは異なる範囲も含めて検討する。例えば、下部工単体と支承部の固有振動数が非常に近い領域で設定している

表 1 Δf_1 や Δf の例

例	h	f_1 (Hz)	Δf_1 (Hz)	f_s (Hz)	N	t_N (s)	Δf (Hz)
1	3%	0.5	3.6×10^{-5}	1000	65536	65.536	1.5×10^{-2}
2	20%	10	3.2×10^{-2}	100	1024	10.24	9.8×10^{-2}

が、実際は支承部の固有振動数は、下部工単体の固有振動数よりも十分大きいと想定される。また、減衰定数を最大で40%まで設定しているが、実際は常時に発揮される減衰定数は数%程度、地震時の非線形化の影響も踏まえても30%程度と考えられる。このような設定をしたのは、本章の目的が提案手法の妥当性検証としているためである。なお、実橋での実測を想定した提案手法の妥当性検証も別途実施している¹⁵⁾。

3.1 下部工1基の場合

下部工1基の場合について、線形の衝撃加振解析を行い、提案手法で下部工単体の固有振動数を算定することで手法の有効性を検証する(図4)。表2に検討ケースを示す。下部工の質量を1tonと基準化し、質点*i*との質量比 $M_i = m_i/m_1$ を変化させた。また、上部工一支承のばねや下部工のばねの剛性は、それぞれ単体としての固有振動数 F_i を設定し、それらを基に $k_i = 4\pi^2 m_i F_i^2$ と換算して設定した。減衰行列は剛性比例減衰として算定し、構造全体系1次モードについて減衰定数 h となるように設定した。衝撃加振としては、時刻0.001sに1kNとなり、それ以外の時刻は0の力を質点1(下部工位置)に作用させた。時間刻みは0.001sで60sの解析を実施した。解析結果を分析する際は打撃直後の強制加振状態の影響を除く必要があるため、5s以降の波形に着目して整理した。

応答変位波形、応答変位のフーリエ振幅スペクトル、フーリエ振幅スペクトル比の例として、Case1-3とCase1-5の結果を図5に示す。ここで、フーリエ振幅スペクトルは、

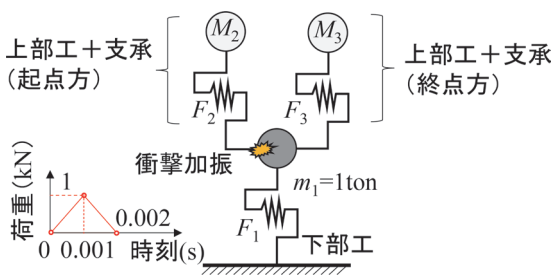


図4 衝撃加振解析のイメージ

表2 検討ケース一覧

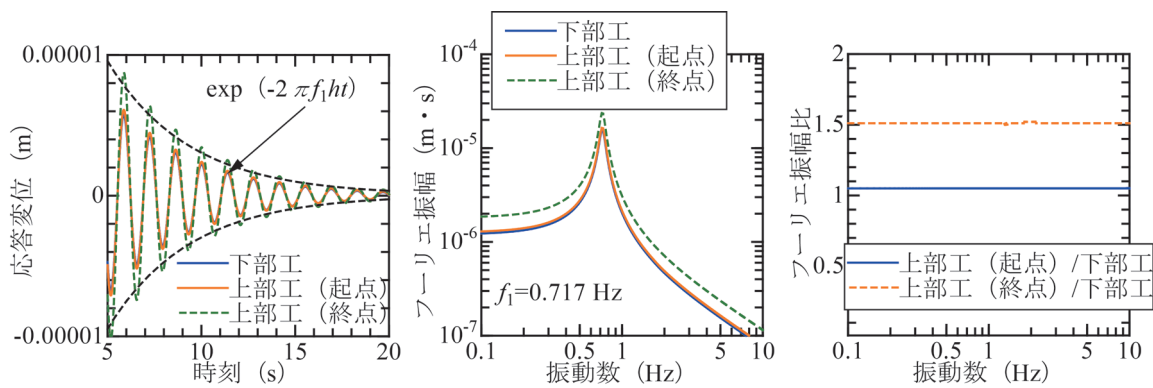
Case	M_2	M_3	F_1 (Hz)	F_2 (Hz)	F_3 (Hz)	h
1-1	1	1	2.0	2.0	2.0	0.05
1-2	2	3	2.0	2.0	2.0	0.05
1-3	2	3	2.0	3.3	1.25	0.05
1-4	2	3	2.0	3.3	1.25	0.1
1-5	2	3	2.0	3.3	1.25	0.3
1-6	2	3	2.0	3.3	1.25	0.5

5s以降の応答変位最大値時点からの減衰波形で算定している。本図より各ケースとも全体1次モードで振動していること、その振動波形は設定した減衰定数の包絡線上を推移することがわかる。この結果を実測データと考えた場合、卓越振動数と減衰定数およびその振動数におけるフーリエ振幅比が判明したことになる。なお、同定したい下部工単体の固有振動数 F_1 は2.0Hzであるが、その情報はフーリエ振幅スペクトル等からは判断できないことがわかる。

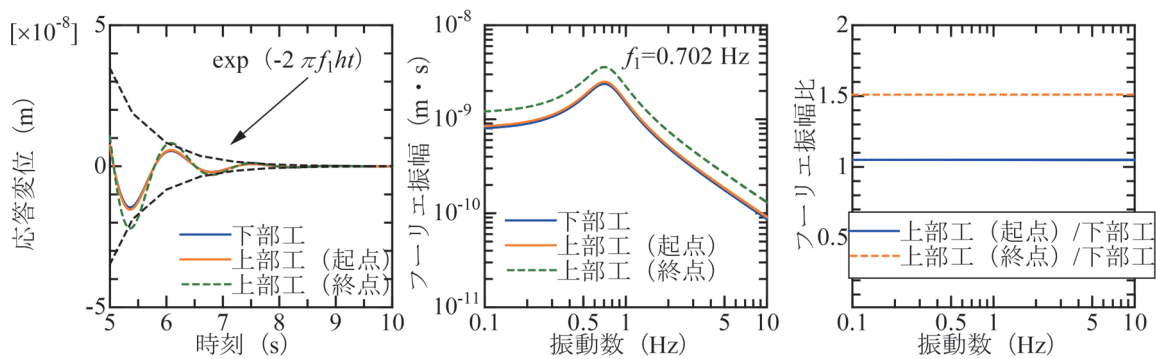
続いて表3にCase1-1~1-6の複素固有値解析で得られる減衰固有振動数 f_{d1} 、非減衰固有振動数 f_1 と応答波形のフーリエ振幅スペクトルから得られる卓越振動数 f を示す。また、卓越振動数と減衰定数、フーリエ振幅スペクトル比から式(26)で算定される固有円振動数を固有振動数に変換したものと F (Hz) と F_d (Hz) を示す。ここで、 F (Hz) は得られた卓越振動数を非減衰固有振動数と仮定して算定した結果であり、 F_d (Hz) は卓越振動数を減衰固有振動数と仮定して算定した結果である。また、横軸に減衰定数を取り、縦軸に F (Hz) と F_d (Hz) を取ったものを図6に示す。なお、図6では表2のケースに加え、減衰定数が1%、3%、20%、40%でその他の条件がCase1-3~1-6と同じとした条件での結果も示す。本表および本図よりCase1-1~1-3(減衰定数5%)の場合、 f_1 と f_{d1} がほぼ一致し、このとき F (Hz) と F_d (Hz) とともに設定値(2.0Hz)を高い精度で同定できていることがわかる。一方で、減衰定数の増加とともに、下部工単体の固有振動数の同定精度は低下する傾向にあり、特に減衰を考慮しない算定法だと乖離が大きい。これは、Case1-3~1-6について減衰定数が増加するとともに、 f_1 と f_{d1} が乖離するためである(表3)。但し、減衰定数30%程度までであれば、非減衰の算定法であっても十分正確値(2.0Hz)に近い結果を推定できていることがわかる。減衰定数30%というのは鉄道構造物等設計標準・同解説(耐震設計)¹²⁾に記載の地盤ばねに与える減衰定数の目安値(15~30%)から考えても比較的大きな値といえるため、実用上は卓越振動数を非減衰固有振動数とみなして算定しても問題ないと言える。

3.2 下部工が2基以上の場合

下部工が2基以上の場合は、全体系の高次モードが必要となるため、衝撃加振解析では高次モードを励起させることは難しい。本検討では、式(26)の妥当性を数値解析的に検証することが目的であるため、前節のような衝撃加振の結果を用いるのではなく、固有値解析によって妥当性を検証することとした。実構造物を対象とした場合には、常時微動観測等の結果を基にFDD法¹⁴⁾などを適用することで、全体系の固有振動数、固有モードを得ることができる¹⁶⁾。検討対象としたばねマスモデルのパラメータを表4に示す。下部工3基の7自由度モデル



(a) Case1-3



(b) Case1-5

図5 応答解析結果の例（左：応答変位波形，中：フーリエ振幅スペクトル，右：フーリエ振幅スペクトル比）

表3 全体系および下部工単体の固有振動数（下部工1基）

Case	f_1 (Hz)	f_{d1} (Hz)	f (Hz)	F (Hz)	F_d (Hz)
1-1	1.035	1.034	1.038	2.004	2.007
1-2	0.764	0.763	0.763	1.997	2.000
1-3	0.725	0.724	0.717	1.979	1.982
1-4	0.725	0.721	0.717	1.979	1.989
1-5	0.725	0.691	0.702	1.937	2.031
1-6	0.725	0.628	0.626	1.727	1.994

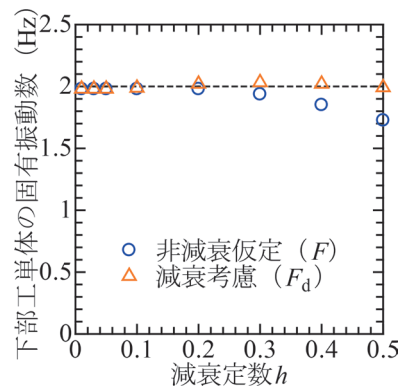


図6 減衰定数と同定される下部工単体の固有振動数の関係

表4 固有値解析の検討ケース

Case	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
2-1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz
2-2	1.5	2.0	2.5	0.5	0.75	1.25	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz	2.0Hz
2-3	1.5	2.0	2.5	0.5	0.75	1.25	2.0Hz	1.25Hz	3.3Hz	5.0Hz	10.0Hz	2.5Hz	1.67Hz

(図7)で3ケース設定した。質量や剛性の設定法は前節と同様である。ここで、算定に必要な非減衰固有振動数および固有モードは実固有値解析で取得できるため、本モデルでは減衰に関する設定は行っていない。

次に、Case2-1~2-3の1~3次の固有振動数 f 、有効質量比を表5に示し、Case2-3の固有モード図を図8に示す。上記のモード図を見ると、1~3次モードは全て下部工1~3の振幅比が異なることがわかり、これらを用いることで下部工単体の固有振動数を算定できる可能性がある。なお、各モードの固有振動数からは下部工単体の固有振動数を判断できないことがわかる。

各ケースの1~3次モードを活用し、式(26)により算定した下部工単体の固有振動数を図9に示す。図にはモデルに設定した正解値も併せて示すが、各ケース、各下部工単体の固有振動数が正確に算定できていることがわ

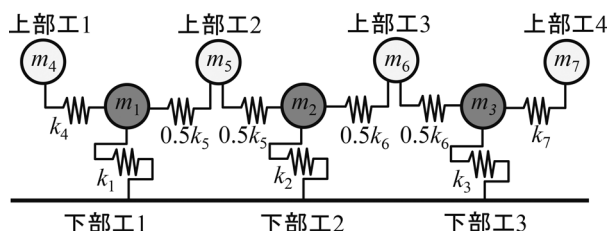


図7 検討対象モデル(下部工3基)

表5 固有値解析結果

Case	モード	固有振動数 (Hz)	有効質量比
2-1	1次	1.15	0.96
	2次	1.27	0.00
	3次	1.71	0.01
2-2	1次	0.99	0.47
	2次	1.34	0.43
	3次	1.72	0.03
2-3	1次	1.12	0.71
	2次	1.53	0.16
	3次	2.37	0.02

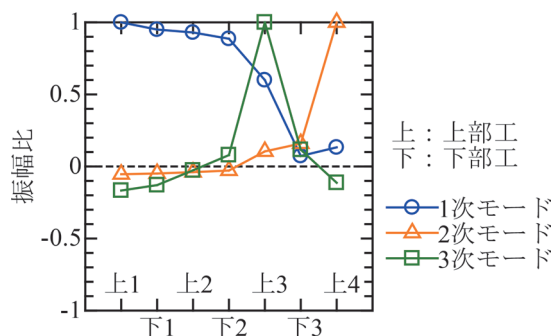
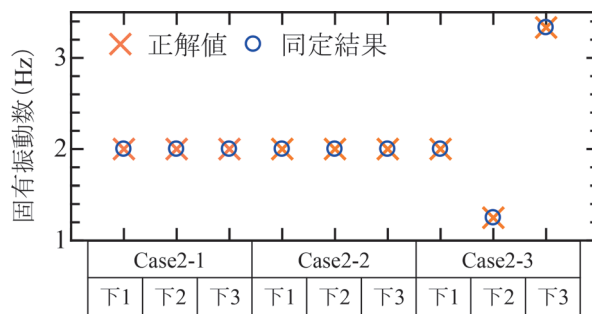


図8 固有モードの例 (Case2-3)



※下：下部工

図9 下部工単体の固有振動数の同定結果(下部工3基)

かる。以上より、複数の構造物が連続する橋りょう・高架橋群においても、複数の全体系の固有振動数および固有モードが取得できれば、提案手法により下部工単体の固有振動数を算定できることが示された。

4. まとめ

本稿では上部工、支承を介して複数の下部工が連続した橋りょう・高架橋群をばねマスモデルで表現し、振動計測等で得られるデータから下部工単体の剛性に直接関係する単体の固有振動数を同定する手法を開発した。そして、数値解析により同定手法の妥当性を検証した。得られた知見を下記に示す。

- ・ n 基の下部工の系について、全体系に関する n 個の非減衰固有振動数および固有モードを用いて各下部工単体の固有振動数を算定できることを理論的に証明した。
- ・一般解として得られた理論式の妥当性を検証するため、下部工1基の場合や3基の場合を例にとり、線形の衝撃加振解析や固有値解析の結果を基に提案手法を適用した。その結果、下部工単体の固有振動数を高精度に同定できることを示した。
- ・鉄道橋りょう・高架橋で想定される減衰定数の範囲であれば、応答波形の卓越振動数と非減衰固有振動数はほぼ同一であるため、実用上は応答波形の卓越振動数を利用して提案手法を適用できることを示した。

なお、紙面の都合で記載を省略したが、データに誤差が含まれている場合の同定精度に与える影響評価¹¹⁾および実橋での実測を想定した提案手法の妥当性検証¹⁵⁾も別途実施している。

文献

- 1) 中島章典, 中野喜代美, 中村晋: 常時微動に基づく独立橋脚および橋梁完成系の振動特性の把握, 構造工学論文集 Vol.56A, pp.305-314, 2010
- 2) 徳永宗正, 曾我部正道, 谷村幸裕, 小野潔: 常時微動測定に

- 基づく鉄道高架橋の等価固有周期の推定手法, 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学), Vol.71, No.1, pp.72-86, 2015
- 3) 西村昭彦, 棚村史郎: 既設橋梁橋脚の健全度判定法に関する研究, 鉄道総研報告, Vol.3, No.8, pp.41-49, 1989
 - 4) 西村昭彦: ラーメン高架橋の健全度評価法の研究, 鉄道総研報告, Vol.4, No.9, pp.14-21, 1990
 - 5) 斎藤知生: モード解析型多入力多出力 ARX モデルを用いた高層建物のシステム同定, 日本建築学会構造系論文集, 第 508 号, pp.47-54, 1998
 - 6) 佐藤忠信, 菊川雅士: 非線形構造システム方程式の線形同定法, 土木学会論文集 No.584/I-42, pp.175-184, 1998
 - 7) 池田芳樹, 花房広哉: 地震観測に基づく曲げせん断型建物モデルの剛性の直接同定法, 日本建築学会構造系論文集, 第 79 卷, 第 705 号, pp.1601-1611, 2014
 - 8) Nakamura, T. and Yamane, T., "Optimum design and earthquake-response constrained design of elastic shear buildings," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp.797-815, 1986.
 - 9) Udewadia, F.E., D.K. Sharma and P.C. Shah, "Uniqueness of Damping and Stiffness Distributions in the Identification of Soil and Structural Systems," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.45, pp.181-187, 1978.
 - 10) 中村充, 竹脇出, 安井譲, 上谷宏二: 限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定, 日本建築学会構造系論文集, 第 528 号, pp.75-82, 2000
 - 11) 和田一範, 坂井公俊: 橋梁・高架橋群における下部工単体の固有振動数同定法の提案, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.77, No.2, pp.I_25-I_34, 2021
 - 12) 国土交通省監修, 鉄道総合技術研究所編: 鉄道構造物等設計標準・同解説 耐震設計, 丸善出版, 2012
 - 13) 国土交通省監修, 鉄道総合技術研究所編: 鉄道構造物等設計標準・同解説 耐震設計, 丸善, 1999
 - 14) Brincker, R., Zhang, L. and Anderson, P., "Modal Identification from Ambient Response using Frequency Domain Decomposition," *Proceedings of 18 th International Modal Analysis Conference*, pp.625-630, 2000.
 - 15) 和田一範, 坂井公俊: 橋梁・高架橋群における下部工単体の固有振動数同定法の解析的検証, 土木学会 第 24 回橋梁等の耐震設計シンポジウム講演論文集, pp.77-82, 2021
 - 16) Chen, P.Y., Iiyama, K., Morikawa, H., Sakai, K., and Kitamura, H., "A Study on Modal Characteristic of Elevated Bridge in Different Construction Stage," *The 39 th JSCE Earthquake Engineering Symposium*, 2019.