ゲージコーナき裂の抑制を図ったレール断面形状選定手法

辻江　正裕*　　幸野　真治*　　畔道　佳明**

Rail Profile Selection Method to Reduce Gauge Corner Cracking Initiation

Masahiro TSUJIE　　Masaharu KONO　　Yoshiaki TERUMICHI

Gauge corner cracking (GCC) occurs on heat treated rails of the high rail in curved sections with a radius of 600 to 800 m. In our previous research, we proposed a countermeasure method for suppressing the GCC initiation by applying a rail with worn profiles to the high rail in curved sections to reduce contact pressure between wheel and rail. In this study the cross-sectional rail profile that is the most effective in suppressing crack initiation was selected by numerical analysis for the high rail in curved sections with a radius of 600 to 800 m.

キーワード：ゲージコーナき裂，摩耗進展，疲労指数，マルチボディダイナミクス，機械学習，ニューラルネットワーク

1．はじめに

在来線の半径 600～800m の曲線外軌に敷設した熱処理レールのゲージコーナ部において，ゲージコーナき裂（以下，「GCC」とする）の発生が多数確認されている（図 1）。GCC は，大きく進展するとレール折損を引き起こす危険性があるものの，連続的に発生するため，頭部補修溶接法[1)]により除去することは困難である。したがって GCC は，その発生を予防することが重要となる。

筆者らは，摩耗進展によって車輪／レール間の接触がなじむことに着目し，GCC の発生が懸念される曲線外軌にレール削正を施工して摩耗形状を適用することにより，車輪／レール接触の緩和を図り，転動疲労き裂である GCC の発生を抑制する手法を提案した[2)]。しかし本手法では，曲線半径をはじめとする軌道条件や列車の走行条件によって，得られるレール摩耗形状も異なる結果が予想される。したがって，本手法を実際の営業線で施工するためには，各箇所に応じたレール摩耗形状を予測するだけでなく，レール摩耗形状へとレール削正を施工する方法についても個別に検討する必要がある。

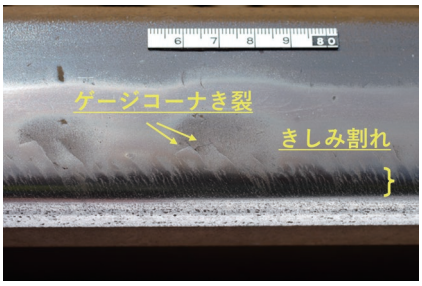


図１　ゲージコーナき裂の発生例

そこで本研究では，GCC の発生が懸念される半径 600～800m の曲線外軌を対象に，機械学習により車輪／レール接触状態の緩和を図るレール断面形状を探索し，最もき裂抑制効果が高いレール断面形状を選定する手法について検討した。

2．き裂発生評価

レール頭頂面を起点として発生する，シェリングやゲージコーナき裂のような転動疲労き裂の発生を評価する指標として，シェイクダウン理論[3)4)]に基づいた疲労指数（FI：Fatigue Index）により評価する手法（以下，「FI モデル」とする）が，先行研究[5)]において提案されている。本手法では，転がり接触疲労は，車輪／レール接触部における面圧やクリープ力に依存する，という考え方に基づいている。そして，接触状態がシェイクダウン限界を超過すると，塑性ひずみが蓄積し，転動疲労き裂の発生に至ると評価する。FI モデルにおける疲労指数の値は，以下の式 (1) で与えられる。

$$FI = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{F_z} - \frac{k_s}{p_0} \tag{1}$$

ここで，FI は疲労指数，F_x ならびに F_y はそれぞれ縦クリープ力ならびに横クリープ力，F_z は車輪／レール間の接触力である。また，k_s はレール鋼のせん断強度であり，p_0 は最大接触面圧である。

FI モデルでは，式 (1) で与えられる疲労指数の値により，き裂発生リスクを評価している。つまり，式 (1) で

＊　　鉄道力学研究部　軌道力学研究室
＊＊　上智大学

与えられ得る *FI* の値が高いほど，き裂発生リスクは高くなると考えられる。先行研究[2]より，熱処理レール材においては，*FI* の値が−0.8 を超過した際に，き裂の発生を確認した。

3．摩耗進展解析によるレール摩耗形状予測

本章では，GCC の発生の抑制を図るレール摩耗形状について検討するため，営業線において GCC の発生が確認された曲線区間を対象として，摩耗進展解析を実施し，レール摩耗形状を予測した。

3.1　摩耗進展解析モデルの概要

本節では，摩耗進展解析で用いた摩耗形状予測モデル[6]について概要を記載する。図 2 に摩耗進展解析の解析フローを示す。

本モデルでは，マルチボディダイナミクスソフト Simpack を活用した車両運動解析，ならびにそれらの解析結果に基づく摩耗形状予測から構成される。はじめに，Simpack において対象とする車両／軌道モデルを構築し，それらのモデルによる車両運動解析を実施する。つぎに，Simpack より得られた解析結果に基づき，車輪／レール接触状態を評価する。そして車輪／レール接触状態から，各箇所におけるレールの摩耗量を算出する。算出した摩耗量ならびにはじめにモデル化したレール断面形状より，レールの摩耗形状を構築する。最後に，構築したレール摩耗形状を再び Simpack の軌道モデルに再配置することで，摩耗形状の軌道モデルに更新する。以上の手順を繰り返すことにより，レール摩耗形状の時系列変化を予測することができる。

また，1 車両の通過によって算出される摩耗量はごくわずかであり，それによる断面形状の変化はほとんど見られず，車輪／レール接触への影響もほとんどないと考えられる。そこで図 2 に示す摩耗形状の更新については，先行研究[7]に基づき，摩耗量を 10000 倍しても，その後の断面形状更新に影響を及ぼすことがないため，1 車両の通過によって算出される摩耗量を 10000 倍して摩耗形状を形成した。

3.2　解析条件

前節で記述した摩耗形状予測モデルを活用し，営業線において GCC の発生が懸念される半径 600，700，800m の曲線外軌を対象に，レール摩耗形状を予測した。解析条件（軌道モデル）を表 1 に示す。なお，この軌道モデルを通過する車両モデルについては，在来線修正円弧踏面を有する通勤型車両（走行速度：105km/h）を対象に構築した。

先行研究[8]より，GCC に混在するきしみ割れの発生

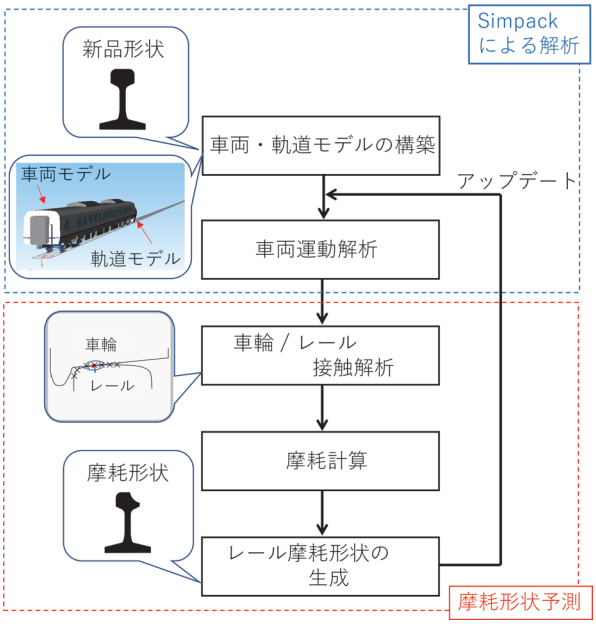


図２　摩耗進展解析の解析フロー

（図 1）については，台車前軸における車輪／レール接触が影響している。GCC についても，きしみ割れと同様に，台車前軸における車輪との接触帯域で発生していることから，前軸における車輪／レール接触が影響していると考え，前軸の車輪／レール接触を対象として摩耗進展解析を実施した。

レール摩耗形状は通過する車輪の形状（設計形状や摩耗形状）の影響を受けるが，車輪の摩耗形状は一意に定まらないため，設計形状の車輪においては車輪／レール間の接触面圧が高く，より摩耗進展が促進すると考え，図 2 に示す車両運動解析の車輪形状は常に設計形状とした。つまり，車輪における摩耗進展は考慮せず，レールのみ摩耗進展させる条件で実施した。なお図 2 に示す断面形状の更新については，削正車による施工でレール摩耗形状を製作することを鑑み，一晩での施工能力から摩耗深さ（削正深さ）が約 0.3mm に収まるよう，15 回実施した（本研究では以下，レール断面形状の更新回数を n とする）。

3.3　解析結果

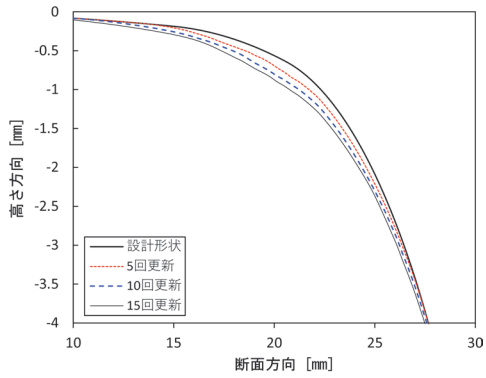
前節に示す条件で実施した摩耗進展解析より算出した，曲線外軌におけるレール頭頂面形状について，更新

表１　解析条件（摩耗進展解析）

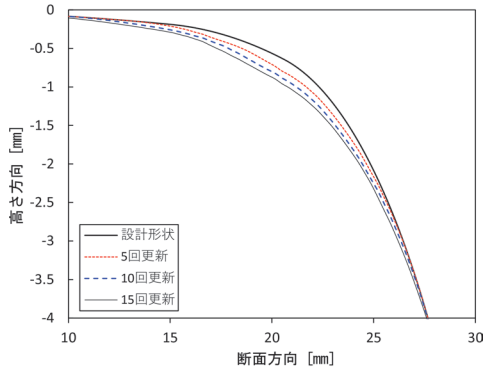
	Case 1	Case 2	Case 3
曲線半径[m]	600	700	800
カント量[mm]	105		
断面形状	JIS 60kg		

回数 5 回，10 回，15 回の結果を図 3 に示す。ただし，いずれの図においても，横軸はレール頭頂面中心からゲージコーナ側への距離を示す。また，摩耗深さならびに摩耗による形状変化をより顕著に示すため，縦軸は拡大して示す。

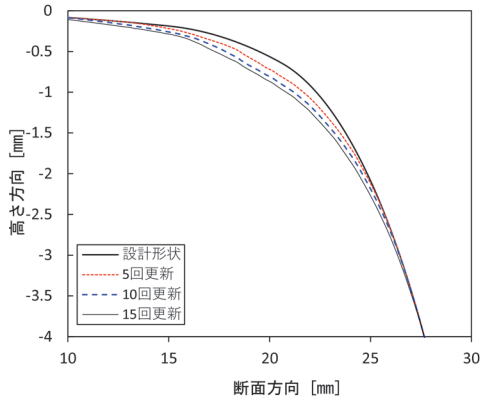
図 3 に示すように，いずれの曲線半径においても，断面形状を更新するにつれて，レールゲージコーナ部の曲率は減少する傾向が確認できる。一方で，曲線半径の違いにより，摩耗帯域や深さ方向の摩耗進展に差が生じていることが確認できる。このような差が見られる要因として，曲線半径の差が影響し，車輪／レール間の接触状態（接触位置や接触応力)に差が生じたことが考えられる。



(a)　Case 1（曲線半径：600m）



(b)　Case 2（曲線半径：700m）



(c)　Case 3（曲線半径：800m）

図３　摩耗進展解析結果

４．レール摩耗形状によるき裂発生評価

本章では，前章に引き続き，機械学習に用いる教師データを蓄積するため，3 章で実施した摩耗進展解析より得られたレール摩耗形状を用いて，車輪／レール接触解析を実施した。そして，2 章に記載した FI モデルを適用し，レール摩耗形状のき裂発生に対する影響について評価した。

4.1　解析条件

車輪／レール接触解析は前章と同様，半径 600，700，800m の曲線区間を対象に実施した。ただし円曲線区間の外軌については，設計形状（n＝0）ならびに前章の摩耗進展解析により得られた更新 15 回分の摩耗形状（n＝1～15）を配置した。本節で実施した車輪／レール接触解析の解析条件（9 ケース）を表 2 に示す。

表 2 に示すように，本節における車輪／レール接触解析においては，GCC 発生の抑制効果が高いレール断面形状を，機械学習（次章に記載）により選定するための教師データを蓄積するため，前章でのレール摩耗形状に対応する曲線半径に加え，その他の曲線半径についても適用して解析を実施した。つまり，前章の摩耗進展解析において半径 600m の曲線区間におけるレール摩耗形状（前章 Case1 の解析より得られた摩耗形状（n＝1～15）ならびに設計形状（n＝0））を，本節の車輪／レール接触解析では半径 600m の曲線区間（表 2 に示す Case4-a）だけでなく，半径 700m（表 2 に示す Case5-a）ならびに 800m（表 2 に示す Case6-a）の曲線区間にも適用した。同様に，半径 700m（前章 Case2 の解析より得られた摩耗形状）ならびに半径 800m（前章 Case3 の解析より得られた摩耗形状）の曲線区間におけるレール摩耗形状についても，摩耗進展解析とは異なる半径の曲線区間にも適用し，車輪／レール接触解析を実施した。そして，車輪／レール接触解析より得られた接触点（レール頭頂面中心からゲージコーナ側に約 20～22mm の点）における車輪／レール接触状態から，2 章に記載した FI モデルを適用し，き裂発生評価を実施した。なお車両モデルについては，前章と同じ通勤型車両ならびに走行条件を採用した。

4.2　疲労指数によるき裂発生評価

表 2 に記述した条件で実施した車輪／レール接触解析の解析結果を式 (1) に適用し，円曲線外軌における疲労指数を算出した。なお式 (1) におけるせん断強度 k_s については，対象である熱処理レール材の引張強度の値が 1200N/mm^2 であることから，この値を$\sqrt{3}$で除した値を採用した。その結果を表 2 に示す解析条件（Case4～6）

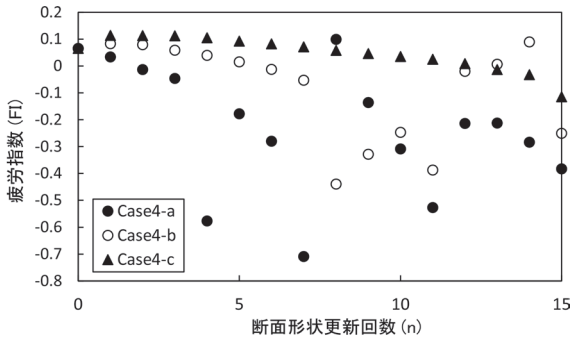
表２　解析条件（車輪／レール接触解析）

試番	曲線半径 [m]	レール形状
Case 4-a	600	設計形状（n=0） 摩耗形状（Case1：n=1～15）
Case 4-b		設計形状（n=0） 摩耗形状（Case2：n=1～15）
Case 4-c		設計形状（n=0） 摩耗形状（Case3：n=1～15）
Case 5-a	700	設計形状（n=0） 摩耗形状（Case1：n=1～15）
Case 5-b		設計形状（n=0） 摩耗形状（Case2：n=1～15）
Case 5-c		設計形状（n=0） 摩耗形状（Case3：n=1～15）
Case 6-a	800	設計形状（n=0） 摩耗形状（Case1：n=1～15）
Case 6-b		設計形状（n=0） 摩耗形状（Case2：n=1～15）
Case 6-c		設計形状（n=0） 摩耗形状（Case3：n=1～15）

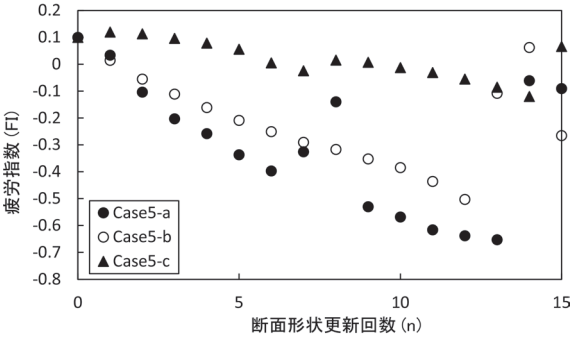
別に，図４（a）～（c）に示す。なお，いずれの図とも，横軸は摩耗進展解析におけるレール断面形状の更新回数（n）である。なお，車輪／レール接触解析において複数点で車輪／レールが接触していた場合は，安全側の評価となるよう，最も疲労指数が高い，すなわちき裂発生リスクが高い値を採用した。

図４に示すように，いずれの曲線半径に対しても曲線外軌に摩耗形状を適用すると，設計形状（n＝0）と比べて，疲労指数は後述する一部を除いて概ね減少する傾向が見受けられる。特にこの傾向は，曲線半径が 700m の Case5，ならびに曲線半径 800m の Case6 において，より顕著に確認できた。一方で，Case4 や Case5 に示す複数の結果（例として，Case4-a における n＝8 の結果や Case4-b ならびに Case5-b における n＝14，Case5-c における n＝15 の結果）については，車輪／レール間で多点接触したために，局所的に高い接触面圧が発生するような接触状態となり，結果として疲労指数の値が高くなった。

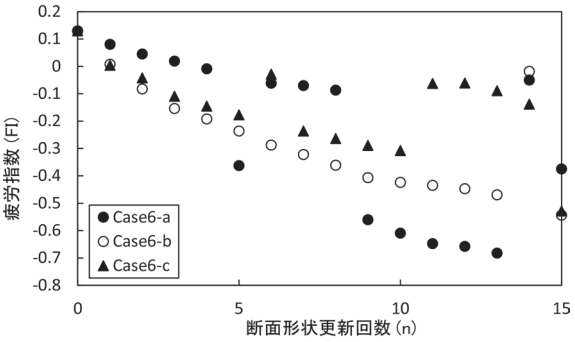
全体的な傾向として，本研究で実施した解析の範囲内では一部の条件を除き，車輪との接触状態から算出される疲労指数は，設計形状を適用（図４（a）～（c）の n＝0）した場合と比べて，曲線外軌に摩耗形状を適用することにより，減少する傾向が確認できた。



（a）　Case 4（曲線半径：600m）



（b）　Case 5（曲線半径：700m）



（c）　Case 6（曲線半径：800m）

図４　解析結果（き裂発生評価）

５．機械学習によるレール断面形状の選定

本章では，3 章で実施した摩耗進展解析より予測したレール摩耗形状（図 3），ならびに 4 章で実施した車輪／レール接触解析より算出した疲労指数（図 4）を教師データとする機械学習により，半径 600～800m のいずれの曲線に対しても，き裂発生の抑制効果が高いレール断面形状を探索した。ただし断面形状の探索において，3 章で得られたレール摩耗形状を一律に教師データとして機械学習に活用すると，さまざまな曲線半径における摩耗形状を組み合わせた，滑らかでない凸凹な断面形状が最適解として収束する可能性が考えられる。そして，そのような断面形状においては，車輪／レール接触がな

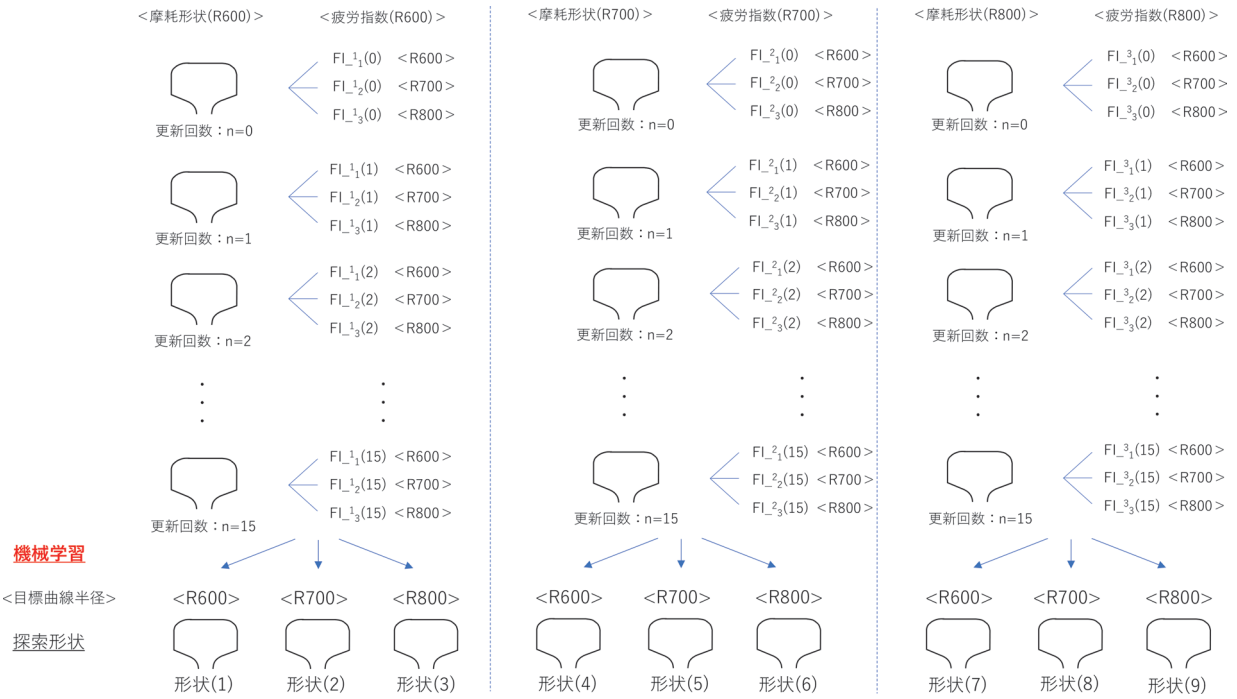


図５　機械学習による断面形状探索

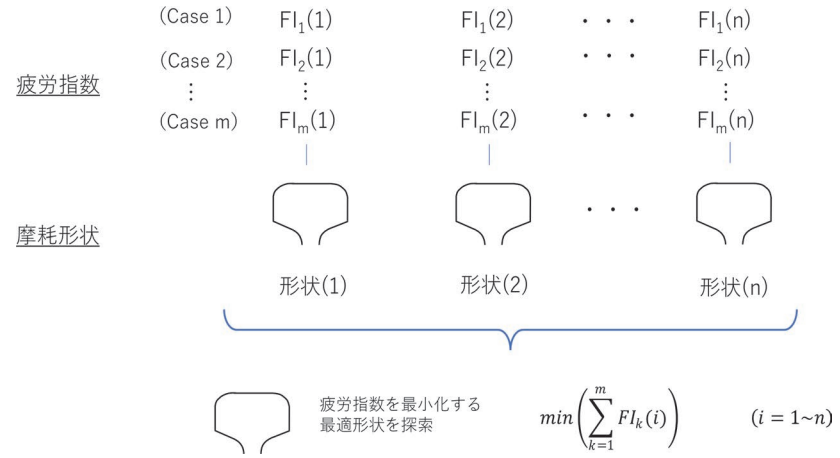


図６　最適形状の探索

じまず，結果として多点接触や局所的に高い接触面圧が発生するような，特異な接触状態となりうる懸念がある。そこで本研究では，各曲線半径において予測したレール摩耗形状を一括りに取り扱うのではなく，曲線半径別にき裂抑制効果が高いレール断面形状を探索することとした。この手法であれば，単一の曲線半径をモデルとしたレール摩耗形状をもとに探索した断面形状であるため，さまざまな曲線半径の摩耗形状を組み合わせた特異な形状となることや，特異な車輪／レール接触状態となることを回避することが期待できる。そこで，3 章の摩耗進展解析ならびに 4 章の車輪／レール接触解析を含め，

① 各曲線半径を対象としたレール摩耗形状を予測
② 予測したレール摩耗形状を用いた車輪／レール接触解析を実施し，各条件における疲労指数を算出
③ 曲線半径別のレール摩耗形状から，最も疲労指数が低くなる形状を機械学習により探索
④ ③により探索したレール断面形状候補の中から，すべての曲線半径に対して疲労指数を低下させる効果のあるレール断面形状を選定

という 4 つのステップで，き裂抑制効果が高いレール断面形状を選定した。①～③のスキームを図 5 に，④のスキームを図 6 に示す。また各ステップの詳細について，以下に記述する。

（ステップ①）

はじめに，3 章で実施したように半径 600～800m の円曲線外軌を対象とした摩耗進展解析を実施し，図 3 で示すようにレール摩耗形状を予測する。なお図 5 においては，半径 600，700，800m の摩耗形状（n＝0～15）に該当する。

（ステップ②）

つぎに，①で得られたレール摩耗形状を曲線外軌に適用した車輪／レール接触解析を実施し，車輪／レール接触状態から疲労指数を算出した。4 章でも記載したように，車輪／レール接触解析から算出される疲労指数の値は機械学習での教師データとして活用するため，摩耗進展解析でモデルとした曲線半径に加えて，それ以外の曲線半径についても車輪／レール接触解析を実施した。算出した疲労指数は，図 5 において $FI_^{1}_{2}$（1）や $FI_^{3}_{1}$（2）等に該当する。ここで図 5 における $FI_^{1}_{2}$（1）は，半径 600m をモデルとした摩耗進展解析について，断面形状の更新を 1 回実施（n＝1）した際のレール摩耗形状を半径 700m の曲線外軌に適用した際の疲労指数である。同様に，$FI_^{3}_{1}$（2）は，半径 800m をモデルとした摩耗進展解析について断面形状の更新を 2 回実施（n＝2）した際のレール摩耗形状を半径 600m の曲線外軌に適用した際の疲労指数である。本研究では，半径 600，700，800m の 3 つの曲線半径を対象に摩耗進展解析を実施し，それぞれ 15 回の断面形状の更新（n＝1～15）を実施している。さらに，同じ 3 つの曲線半径を対象に車輪／レール接触解析を実施していることから，図 5 において 48 個のレール断面形状データ（n＝0 は設計形状のため同一形状），ならびに各断面形状に関連付けられる総計 144 個（n＝0 は同一形状であるため，疲労指数の値も同じ）の疲労指数がデータとして算出される。

（ステップ③）

本章のはじめにも記載したように，ステップ②で得られた 48 個のレール断面形状データならびに 144 個の疲労指数を一括りに扱ってレール断面形状を探索すると，さまざまな曲線半径の摩耗形状を組み合わせた，凸凹で滑らかでない断面形状が最適解として収束する可能性が考えられる。そこで本研究では，これらの問題点を回避するため，同一の曲線半径の摩耗形状ならびにそれに対応する疲労指数を教師データとした機械学習を行い，曲線半径ごとに最適形状を探索した。つまり図 5 において，半径 600m の曲線区間をモデルとした摩耗進展解析より予測した 16 個のレール断面形状（n＝0～15）と，それぞれに対応する合計 48 個の疲労指数 $FI_^{1}_{1}$（0）～$FI_^{1}_{3}$（15）を教師データとし，それらから半径 600，700，800m に適用した際に最も疲労指数が低くなる形状を機械学習により探索した。機械学習により得られた断面形状をそれぞれ形状（1），形状（2），形状（3）とする（図 5）。同様に，半径 700m の曲線区間をモデルとして予測したレール断面形状とそれに対応する疲労指数，半径 800m の曲線区間をモデルとして予測したレール断面形状とそれに対応する疲労指数をもとに，最も疲労指数が低くなる断面形状として，形状（4）～形状（9）を探索した。なお本研究における機械学習については，5 層のニューラルネットワークを構築して実施した。

（ステップ④）

最後に，ステップ③で得られた 9 つの断面形状である形状（1）～形状（9）について，半径 600，700，800m の 3 つの曲線外軌に適用した，円曲線外軌における車輪／レール接触状態から，疲労指数（FI_1（1）～FI_m（n））を算出した（図 6）。なお本研究では，上述のように適用した曲線半径は 3 種類，断面形状候補は 9 候補あることから，図 6 において m＝3，n＝9 となる。図 6 に示すように，各断面形状について算出される疲労指数について，以下の式 (2) に示すように各条件における疲労指数の総和を算出することで，その断面形状を適用した際の適用度が算出されると考えられる。つまり，半径 600，700，800m の 3 つの曲線外軌に適用した際に，すべての曲線半径に対してき裂抑制効果が高ければ，算出される疲労指数の総和は低くなる。逆に，き裂抑制効果が低ければ，疲労指数の総和は高くなる。

$$FI_t = \sum_{k=1}^{m} FI_k(i) \qquad (i = 1 \sim n) \tag{2}$$

ただし FI_t は疲労指数の総和，FI_k（i）は各断面形状を適用した際に算出される疲労指数である。

このように，さまざまな条件に適用した際に算出される疲労指数の総和によって，いずれの曲線半径に対しても最もき裂抑制効果が高いレール断面形状を選定することができる。図 5 に示す 9 個の断面形状候補について，半径 600，700，800m の 3 つの曲線外軌にそれぞれ適用した車輪／レール接触解析を実施し，各曲線半径別に疲労指数を算出した。そして，式 (2) で与えられる，半径 600，700，800m の 3 つの曲線外軌に適用した疲労指数の総和を算出した。それらの結果を図 7 に示す。なお比較のため，JIS60kg レール断面形状についても同様に適用した結果を合わせて示す。

図 7 より，本研究において検討した 9 つの断面形状候補は，いずれも JIS60kg レール断面形状に比べて，式 (2) で与えられる疲労指数の総和が低い値となっていることから，き裂発生の抑制効果が認められる。特に 9 つの断面形状候補の中では，形状（3）が最も低い値となっ

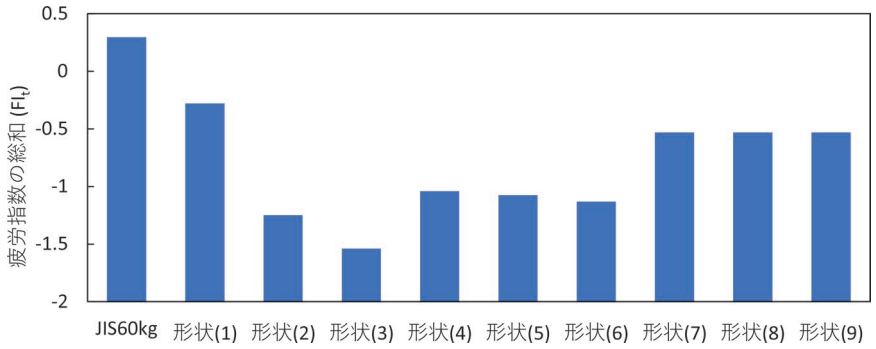


図７　形状候補における疲労指数の算出結果

たことから，本研究で検討した範囲内では最もき裂抑制効果が高い断面形状であると考えられる。そこで本研究では以下，この形状（3）の断面形状を GCC の抑制効果が最も高い断面形状（以下，「最適形状」とする）として取り扱う。

6．提案形状によるき裂抑制効果

本章では，前章において選定した最適形状について，車輪／レール接触解析結果に基づき，き裂抑制効果を評価した。

はじめに，最適形状と JIS60kg レール断面形状を重ね合わせた結果を図 8 に示す。また，最適形状における設計形状との高さ方向の差を図 9 に示す。なお，いずれの図においても，断面方向の正の側がゲージコーナ側となるようプロットしている。また断面形状の差をより顕著に示すため，縦軸については拡大して表示している。

図 8 に示すように，最適形状はゲージコーナ側の一部が摩耗した形状となっている。また顕著な凹凸もなく，滑らかな形状であることが確認できる。

図 9 に示すように，最適形状と JIS60kg レール断面形状を比較すると，ゲージコーナ側で最大約 0.3mm の差が確認できる。したがって，本研究で提案する最適形状については，JIS60kg レール断面形状を図 9 で示す位置，量を研削すること，もしくは図 8 に示す最適形状となるよう鋼片を圧延することで製作することができる。

つぎに，最適形状における曲線半径別のき裂抑制効果を評価するため，前章で行った車輪／レール接触解析より，半径 600，700，800m の 3 つの曲線外軌に最適形状を適用した際の疲労指数をもとに検討した。

最適形状ならびに JIS60kg レール断面形状を半径 600，700，800m の 3 つの曲線外軌に適用した際の疲労指数について算出した結果を図 10 に示す。なお 2 章でも記載した通り，先行研究[2)]より熱処理レール材においては，*FI* の値が－0.8 を超過した際に，き裂の発生を確認していることから，この値を基準にプロットした。

図 10 に示すように，いずれの曲線半径においても，

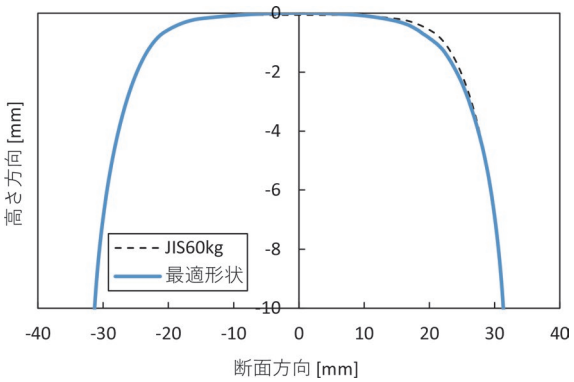


図８　最適形状の断面形状

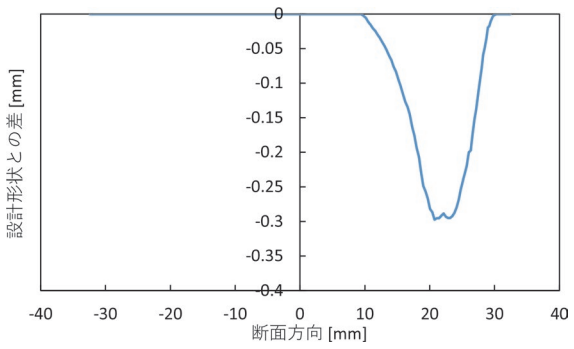


図９　最適形状における削正量

最適形状における疲労指数の値は，JIS60kg レール断面形状に比べて減少する結果となった。特に半径 700m ならびに半径 800m においては，疲労指数の減少する傾向が大きいことを確認した。これらの結果より，提案形状を半径 600～800m の曲線外軌に適用することにより，JIS60kg 形状のレールを敷設した状況に比べて，ゲージコーナ部におけるき裂の発生状況を緩和する効果が期待できる。

7．まとめ

本研究では，複数の曲線半径に対して，GCC の起点となるゲージコーナ部のき裂発生を抑制するレール断面

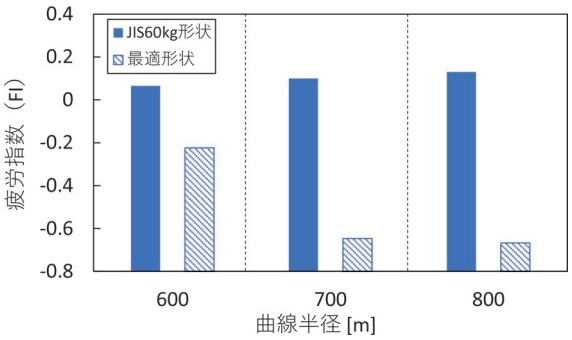


図 10　曲線半径別の疲労指数の比較

形状を提案するため，き裂発生を評価する疲労指数を最小化するレール断面形状を選定することを目的とした。得られた結果は以下の通りである。

・マルチボディダイナミクスを活用した摩耗進展解析，ならびに予測したレール摩耗形状を曲線外軌に適用した車輪／レール接触解析を実施した。そして，これらの解析より得られたレール摩耗形状ならびにその断面形状に対応する疲労指数を教師データとした機械学習を実施した。さらに，機械学習により探索した各レール断面形状に対する疲労指数の総和を算出することで，疲労指数を最小化するレール断面形状を選定するプロセスを示した。
・半径 600，700，800m の曲線区間を対象に，上記のプロセスを適用し，これらの曲線半径に対して疲労指数を最小化するレール断面形状を選定した。
・選定したレール断面形状について，半径 600，700，800m の曲線外軌に適用した際のき裂抑制効果を評価した。その結果，JIS60kg レール断面形状と比較すると，疲労指数が減少する傾向を確認した。したがって，選定した断面形状のレールをこれらの半径の曲線外軌に適用することで，ゲージコーナ部のき裂発生を緩和する効果が期待できる。

本研究では，マルチボディダイナミクスの観点から，最適形状におけるき裂抑制効果を検討した。今後は FEM による車輪／レール接触応力解析，ならびに実物大の車輪／レール断面形状を有する試験輪を組み合わせた転動疲労試験を実施し，本研究で提案した最適形状におけるき裂抑制効果を検証する予定である。

文　献

1）伊藤太初，梅内一行，寺下善弘，辰巳光正，山本隆一：テルミット頭部補修溶接法を用いたレール補修方法，鉄道総研報告，Vol.28，No.6，pp.41-46，2014
2）辻江正裕，沖田雅佳，陳樺，疇道佳明：摩耗進展による車輪／レール接触の緩和を図ったゲージコーナき裂抑制手法の検討，日本機械学会論文集，Vol.88, No.908, DOI: 10.1299/transjsme.21-00327，2022
3）K.L. Johnson, “The strength of surfaces in rolling contact,” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, Vol.203, pp.151-163, 1989.
4）A.F. Bower, K.L. Johnson, “Plastic flow and shakedown of the rail surface in repeated wheel-rail contact,” Wear, 144 , pp.1-18, 1991.
5）A. Ekberg, E. Kabo, H. Andersson, “An engineering model for prediction of rolling contact fatigue of railway wheels,” Fatigue Fracture Engineering Master Structure, 25 , pp. 899 - 909, 2002.
6）辻江正裕，沖田雅佳，陳樺，疇道佳明：混合すべり条件下におけるレール摩耗形状予測モデルの構築，日本機械学会論文集，Vol.86, No.890, DOI: 10.1299/transjsme.20-00056, 2020
7）辻江正裕，吉岡亜陸，水谷祐貴，疇道佳明：マルチボディダイナミクスによるレール摩耗形状予測モデルの構築と妥当性の検証，日本機械学会論文集，Vol.83, No.854, DOI: 10.1299/transjsme.17-00074，2017
8）Y. JIN, F. Aoki, M. Ishida, A. Namura, “Investigation and analysis of the occurrence of rail head checks,” International Journal of Railway, Vol.2, No.2, pp.43-49, 2009.