

周期解計算手法を用いた蛇行動安定性解析

山長 雄亮*

Analysis of Hunting Stability Using Method for Calculating Periodic Solution

Yusuke YAMANAGA

In order to evaluate the vehicle running stability, hunting motion test is commonly conducted using a real bogie on roller rigs. Hunting motion occurs at a certain speed without any disturbance. However, even below the critical hunting speed, hunting motion can occur when disturbance is applied. Our previous studies have shown that there exists a clear point where initial lateral displacement of wheelset causes hunting motion and the point originates from unstable limit cycle. Therefore, we applied a shooting method, which can calculate periodic solution for nonlinear system, to obtain an unstable limit cycle. This paper reports summary of the shooting method and its application for vehicle dynamics model, then examines the validity of the result obtained by the method.

キーワード：走行安定性，蛇行動，周期解，シューティング法，リミットサイクル

1. はじめに

鉄道車両の走行安定性を評価する方法の一つに、レールと同じ断面形状を有する軌条輪を備えた定置試験装置（車両試験装置）上で行う蛇行動試験がある。この試験には、トリガーとなる外乱を付与せずに蛇行動が発生する速度（蛇行動限界速度）を評価する単純回転試験や、供試台車に直接外力を加えたり、軌条輪に左右方向の変位を与えたりするなど、明示的な外乱を付与して蛇行動限界速度を評価する加振試験がある。加振試験での蛇行動限界速度は単純回転試験での限界速度よりも低下し、また、加振による外乱の与え方によって蛇行動限界速度が異なる場合がある。

これまでに、走行速度と加振後の自由振動の初期振幅で表される曲線（蛇行動限界曲線と定義）が一定の速度範囲に存在し、自由振動の初期振幅が蛇行動限界曲線上の閾値を上回る場合に、蛇行動に至ることが実験的に明らかとなった¹⁾。さらに、蛇行動限界曲線上では、理想的には収束も発散もしない周期的な振動状態が存在することも明らかとなっている¹⁾。蛇行動発生の有無は蛇行動限界曲線と加振後の自由振動の初期振幅の関係性で説明できることから、数値解析により蛇行動限界曲線を算出することができれば、走行安定性評価の精度向上に資するものと考えられる。

そこで蛇行動限界曲線上では周期的な振動状態が存在するという実験的な知見に基づき、非線形系の周期解計算手法の一つであるシューティング法を適用して蛇行動限界曲線を算出する手法を構築した²⁾。本報では、シューティング法の概要と蛇行動解析への適用方法および計算手順

について述べるとともに、周期解の計算結果を考察する。

2. 蛇行動限界曲線の実測例

本章では、車両試験装置上での蛇行動試験における収束と発散の境界となる蛇行動限界曲線の実測例を示すとともに、その特徴について述べる。

2.1 半車体条件蛇行動試験

蛇行動試験では、車両試験装置に備わる円盤状の軌条輪の上に供試台車を載せ、軌条輪を高速回転することで車輪の転走を模擬する。本研究では、車体の半分の質量特性を模擬した荷重枠と1つの供試台車を用いた半車体条件で試験を実施した。また、より低速で蛇行動を発生させるために、通常2本装備されているヨーダンバをすべて取り外した状態で試験を行った。

2.2 蛇行動発生の有無を分ける条件

本節では、蛇行動が発生する初期条件を実験的に調査した結果の例を示す。試験では、まず軌条輪の回転のみで明示的な外乱を与えない試験である単純回転試験を実施し、続いて加振試験を実施した。

単純回転試験は、前述の通り、明示的な外乱を与えずに軌条輪を回転した場合に蛇行動が発生する速度（蛇行動限界速度）を調査する試験である。軌条輪を徐々に加速し台車の振動が発散（蛇行動）に至った時点で軌条輪の加速を止め、その後蛇行動が収束するまで軌条輪を減速してその間の台車の挙動を測定した。その結果、速度276km/h付近でそれまで中立位置で安定だった輪軸左右変位の振幅が急激に増大して蛇行動に発展し、その後減速しても蛇行動による定常振動が持続し、最終的には

* 車両構造技術研究部 車両運動研究室

速度 210km/h 付近で中立位置に一気に収束した。

次に蛇行動の発生条件を調べるための加振試験を行った。軌条輪装置を左右方向に加振することで初期外乱を与えて疑似的に輪軸左右変位の初期変位を与えた。軌条輪加振中の台車の挙動は、強制加振に対する応答となるが、軌条輪加振停止後は軌条輪加振によってもたらされた変位および速度を初期値とする振動と考えることができる。そこで、軌条輪加振停止直後からの輪軸左右変位の振動の応答を計測し、最初の1波の片振幅の大きさを左右速度が0となる左右変位の初期値とみなした。

図1に、軌条輪加振によって誘発された振動の輪軸左右変位の初期振幅の大きさを示す。軌条輪加振後の振動が中立位置に収束した場合を×印で、収束せずに大振幅の蛇行動に至った場合を○印で表している。加振後に収束するか、大振幅の蛇行動に発展するかについては、輪軸の左右変位初期振幅に明確な境界が存在し、走行速度に依存して連続的に変化していることが分かる。本研究では図中に緑色の点線で示す連続的な境界線を蛇行動限界曲線と定義している。また、図1には、先に述べた単純回転試験での蛇行動発生から収束までの定常振動振幅の推移を灰色の実線で重ねている。蛇行動発生有無を分ける境界は走行速度が増加するにつれて0に近づき、その境界が0になる速度点は単純回転試験時において蛇行動が発生した速度と概ね等しい(約280km/h)ことが分かる。一方で、走行速度が低下すると蛇行動発生有無を分ける境界が0から遠ざかり収束する領域が広がっていくが、最終的にはその境界が消滅している(約210km/h)。また、境界が消滅する時の輪軸左右変位初期振幅の大きさと、単純回転試験での蛇行動が収束する瞬間の振幅の大きさが一致している(約5mm)ことが分かる。

2.3 蛇行動限界曲線の特性

前節で、単純回転試験での蛇行動発生速度から蛇行動が収束する速度までの速度域において、輪軸左右変位の振幅値に蛇行動発生と収束とを分ける閾値が存在し、そ

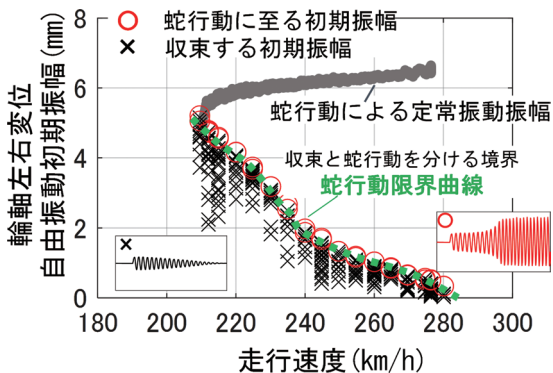
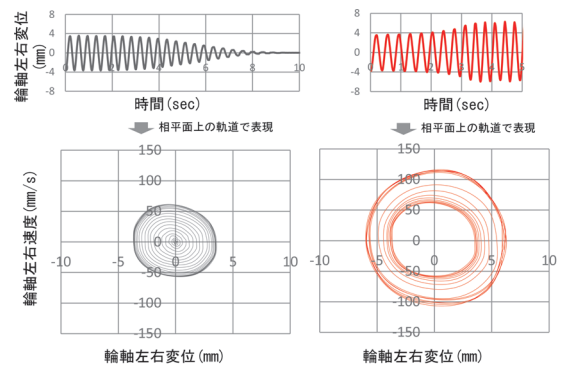


図1 蛇行動発生有無を分ける蛇行動限界曲線

れが走行速度に対して連続的に変化する蛇行動限界曲線を形成していることが分かった。本節では、蛇行動限界曲線近傍における台車の挙動を観察することにより、その特性を調べる。

図1において走行速度 225km/h の時を例にとり、蛇行動限界曲線上の点近傍での輪軸の挙動を図2に示す。図2(a)は蛇行動限界曲線直近から出発し収束した場合の挙動であり、図2(b)は蛇行動限界曲線直近から出発し蛇行動に至った場合の挙動である。図中には輪軸左右変位の時刻歴波形とともに、横軸を輪軸左右変位、縦軸を輪軸左右速度とした相平面上の軌道も併せて示す。図2(a)の相平面図では、軌道を示すスパイラルは時計回りに進んでおり、スパイラルの外縁部から中立点に向けて収束している様子を示している。一方図2(b)の相平面図では、スパイラルの内縁部から出発した軌道が時計回りに進みながらスパイラルの外縁部に向かって漸近していることを表している。このスパイラルの外縁部の周回軌道は、フランジ喉部での接触により振幅が一定の大きさに抑えられることで生じる定常振動に相当する。



(a) 収束する場合 (b) 蛇行動に至る場合

図2 蛇行動限界曲線近傍での挙動

ここで、図2(a)と図2(b)それぞれの相平面上の軌道を重ねて図3に示す。灰色の実線で示すスパイラルの外縁部と赤色の実線で示すスパイラルの内縁部が、ほぼ一致していることがわかる。このことから、収束するスパイラルの外縁部と蛇行動に至るスパイラルの内縁部との間には、図3に緑の点線で示すような収束も発散もしない極限的な閉軌道が存在する可能性があることが分かる。つまり、自由振動の初期振幅の大きさが蛇行動限界曲線直上にあった場合、理想的には、その後は収束も発散もせず振動を継続することを意味する。ただし、現実にはそのような状態は安定して存在しえず、蛇行動限界曲線直上から僅かにでも離れれば、収束もしくは発散する。

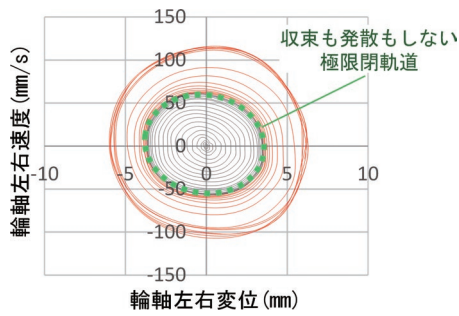


図3 極限閉軌道の存在

3. 周期解計算手法の適用

前章で述べた通り、蛇行動限界曲線直上では収束も発散もしない極限閉軌道（リミットサイクル）が存在する可能性があることが分かった。仮にそのようなリミットサイクルが存在するとすれば、そこでの挙動は常に一定の軌道上を周回するため周期振動となる。したがって、軌条輪上の蛇行動試験を表現する運動モデルを構築してその周期解を計算することができれば蛇行動限界曲線を導出できるものと考えられる。

リミットサイクルは非線形系にのみ存在する周期解である。蛇行動現象を取り扱う運動モデルは多自由度系であるため、多自由度非線形系の周期解を計算可能な手法を適用する必要がある。さらに、車輪／レールの接触力は、特にフランジ喉部付近での接触状態も含めると比較的強い非線形性を伴うと考えられる。そこで、多自由度の強非線形系に適用できる周期解計算手法であるシューティング法の適用を試みた。

3.1 シューティング法

本節では、シューティング法の概要³⁾を述べる。シューティング法は、周期解の初期値を求める問題を2点境界値問題としてとらえ、直接数値積分法とニュートン法とを併用して周期解の初期値を効率的に求める手法である⁴⁾。周期解の初期値が求まれば、任意の時刻の解は数値積分により得られる。

ここでは、式(1)に示すような方程式の中に時間 t が陽に含まれない自律系の n 元連立非線形常微分方程式を考える。

$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$

ここで、 x は n 次元実ベクトル変数、 X は n 次元実ベクトル値関数である。

今、 $t=0$ のときの初期値を x^0 とする式(1)の解を $x(t, x^0)$ で表すものとするれば、式(2)、式(3)が成立する。

$$x(0, x^0) = x^0 \tag{2}$$

$$x(t, x^0) = x^0 + \int_0^t X(x(\tau, x^0)) d\tau \tag{3}$$

ところで、 $x(t, x^0)$ が周期 T の周期解であるためには、 $x(T, x^0) = x^0$ でなければならない。そこで、式(3)において、 $t=T$ とおくことにより、式(4)が得られる。

$$f(x^0, T) \equiv \int_0^T X(x(\tau, x^0)) d\tau = 0 \tag{4}$$

よって、式(1)の周期解 $x(t, x^0)$ を求めることは、式(4)を満足する初期値 x^0 と未知の周期 T を求める問題に帰着できることが分かる。式(4)は非線形連立方程式となる。ここで n 次元実ベクトル x^0 と周期 T とを合わせた未知数の数は $(n+1)$ 個であるにも関わらず、式(4)の方程式は n 本しか存在せず、このままでは解を求めることができない。そこで、自律系の場合には解の位相に任意性がある（時間の原点を自由に選べる）ことに着目して、この位相を適当に拘束するものとし、式(5)の初期値 x^0 に対する拘束条件式を追加する。

$$g(x^0) = 0 \tag{5}$$

式(5)の例としては、恒等的に零でない成分のうち、いずれか一つの初期変位または初速度を零に拘束することなどが考えられる。

以上の準備のもとに、未知数 $n+1$ 個に対し、式(4)および式(5)で示される計 $n+1$ 元の連立方程式を解く。一般に、非線形連立方程式は解析的に解けないため、近似計算によって求める。

式(4)および式(5)を満足する初期値 x^0 および未知周期 T をニュートン法による逐次計算により求める。今、 k 回目反復計算における近似値を x_k^0 および T_k とし、その修正量を δx_k^0 および δT_k とする。式(4)および式(5)を x_k^0, T_k 周りで展開した修正量に関する一次近似式は次式で表される。

$$\begin{aligned} & f(x_k^0 + \delta x_k^0, T_k + \delta T_k) \\ & \approx f(x_k^0, T_k) + \frac{\partial f(x_k^0, T_k)}{\partial x^0} \delta x_k^0 + \frac{\partial f(x_k^0, T_k)}{\partial T} \delta T_k \\ & = \int_0^{T_k} X(x(\tau, x_k^0)) d\tau \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \int_0^{T_k} X(x(\tau, x_k^0)) d\tau \right\} \delta x_k^0 \\ & + X(x(T_k, x_k^0)) \delta T_k = 0 \\ & g(x_k^0 + \delta x_k^0) \approx g(x_k^0) + \frac{\partial g(x_k^0)}{\partial x^0} \delta x_k^0 = 0 \end{aligned}$$

これらをまとめて式 (6) で表す。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \int_0^{T_k} X(x(\tau, x_k^0)) d\tau & X(x(T_k, x_k^0)) \\ \frac{\partial g(x_k^0)}{\partial x^0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_k^0 \\ \delta T_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int_0^{T_k} X(x(\tau, x_k^0)) d\tau \\ g(x_k^0) \end{bmatrix} \quad (6)$$

式 (6) は、 δx_k^0 および δT_k に関する $(n+1)$ 元連立線形代数方程式であるので数値的に解くことができ、修正量が微小となるまで反復計算することにより、周期解の初期値とその周期が求められる。

3.2 蛇行動限界曲線導出への適用

前節で述べたシューティング法を蛇行動解析運動モデルに適用する。軌条輪上の半車体条件の運動モデルを図 4 に、自由度の一覧を表 1 に示す。半車体荷重枠、台車枠、前後輪軸を剛体要素とする合計 9 自由度の左右系モデルを用いた。

輪軸～台車枠および台車枠～荷重枠で相互作用を及ぼす要素は、線形の弾性バネと比例粘性減衰のモデルとした。車輪～レール間の作用力を除いた線形の運動方程式は式 (7) で表される。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (7)$$

但し、 $x = (\phi_B, \varphi_B, y_T, \phi_T, \varphi_T, y_{w1}, \varphi_{w1}, y_{w2}, \varphi_{w2})^T$ である。また、 M, C, K はそれぞれ質量行列、減衰行列、剛性行列を表し、いずれも実対称行列となる。

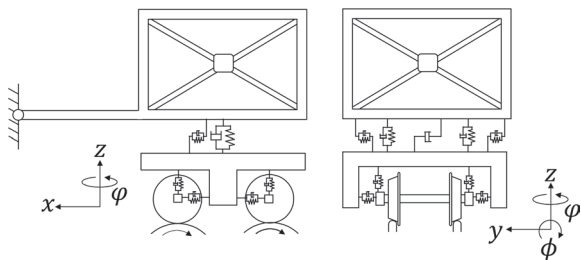


図 4 軌条輪上の半車体条件運動モデル

表 1 自由度の一覧

剛体要素	方向	記号
半車体	ロール, ヨー	ϕ_B, φ_B
台車枠	左右, ロール, ヨー	y_T, ϕ_T, φ_T
輪軸 (前位)	左右, ヨー	y_{w1}, φ_{w1}
輪軸 (後位)	左右, ヨー	y_{w2}, φ_{w2}

本解析モデルにおいて非線形要素となる車輪／レールの接触力は、以下により算出した。

①接触計算

輪軸左右変位に対して、車輪踏面形状と軌条輪頭頂面形状との幾何学的な条件から定まる車輪の接触点パラメータ (接触点における車輪半径, 接触角, 曲率) および軌条輪の接触点パラメータ (接触点における軌条輪半径, 曲率) を事前に計算しておき、その数表を参照する。

②車輪～レール間に作用する法線力の算出

輪軸の上下方向の力とロール方向のモーメントが静的に釣り合っているものとみなし、その釣り合い式から収束計算により求める。

③非線形クリープ力の算出

クリープ率とクリープ力の関係は Levi-Chartet のモデル⁵⁾ から算出する。

上記の手続きで計算する車輪～レール間に作用する力を輪軸の変位と速度の関数とみなすことにより、輪軸に作用する力とモーメントをベクトル値関数 $f(\dot{x}, x) = (0 \ 0 \ 0 \ f_{L1} \ f_{M1} \ f_{L2} \ f_{M2})^T$ で表す。但し、 f_{L1} および f_{L2} は輪軸に作用する左右力を表す関数であり、 f_{M1} および f_{M2} は、輪軸に作用するヨー方向のモーメントを表す関数である。下付きの添え字の 1 は前軸を表し、2 は後軸を表す。このとき、車輪～レール間に作用する力も含めた半車体モデルの運動方程式は式 (8) で表される。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(\dot{x}, x) \quad (8)$$

これを式 (9) のように書き換える。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\dot{x}, x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

以上のようにして、半車体モデルの運動方程式を (\dot{x}, x) に関する一階の非線形連立微分方程式で表し、3.1 節の式 (1) に当てはめて考えることによって、シューティング法を適用した。

なお運動方程式を解く過程において、テーブル計算や法線力計算における収束演算が含まれているため、シューティング法の手続きにある偏微分を解析的に導出することが困難である。そこで偏微分は微小区間の差分商で近似した。また、式 (5) に相当する拘束条件式については、任意の自由度の初期値に対して拘束可能であるが、ここでは進行方向前位の輪軸左右変位の初期値を 0 として式 (10) で表した。

$$y_{w1}^0 = 0 \quad (10)$$

4. 周期解と蛇行動限界曲線

前章で述べた軌条輪上の半車体モデルの運動方程式に対して、走行速度を変化させながら各走行速度における周期解の初期値と周期をシューティング法により算出した。さらに、得られた周期解の初期値および周期を用いてルンゲ・クッタ法による数値積分を運動方程式に対して行い、1周期における進行方向前軸の輪軸左右変位の最大値を求め、それを周期解の振幅とみなした。

本章では、周期解を計算するにあたって必要な手順を説明するとともに、得られた周期解を考察する。

4.1 計算手順

蛇行動限界曲線上において周期的な振動が理想的に存在すると同時に、フランジ喉部の接触を伴うような大振幅の蛇行動も周期的な振動となる。シューティング法ではその両方の周期解が求められる。

本節ではまず、周期解の計算結果の概形を示した上で、計算過程における工夫を述べる。

図5に周期解の計算結果を示す。横軸に走行速度、縦軸に各走行速度において求められた周期解の振幅をプロットした。周期解の詳細については次節で述べる。

周期解の計算開始地点の速度は、ここでは260km/hとした。この開始速度は任意であるが、確実に蛇行動が発生すると考えられる高い速度から開始する。まず、当該速度において蛇行動が発生させて、十分に時間が経過した時点で定常周期解に近い状態であると考えられる。この状態で、拘束条件である輪軸左右変位が0($y_{w1}^0 = 0$)となる瞬間(ゼロクロスする瞬間)を求め、その時の状態量をニュートン法逐次近似計算の初期値とする。この場合、与えた初期値は十分に周期解に近いの

で、容易に収束し、図5に赤丸で囲んだ周期解が得られる。この後は、得られた周期解を次の速度における周期解計算の初期値として計算を進めていく。

上記の要領で一定の速度幅で周期解計算を進めていくと、ニュートン法が収束せず周期解を得られなくなる時点が現れる。この場合、速度幅を小さくした上で周期解計算を繰り返すが、十分に小さな速度幅でも解が見つからない場合、折返し地点に到達したものとみなし、速度の探索方向を反転させる。

折り返し地点から最初の1点目の周期解の探索には工夫が必要となる。1つ前に得られた周期解の初期値を用いて計算をすると、本来求めたい次の周期解ではなく、これまで辿ってきた蛇行動の周期解近傍に戻って収束してしまう。そこで、蛇行動限界曲線であれば、走行速度の上昇に応じて振幅が減少するという実験的な知見を用い、1つ前の周期解の振幅よりも必ず小さくなるという条件を付与することにより、求めるべき周期解の振幅を得ることができる。以降も同様にして、周期解の振幅が速度の上昇に応じて減少するという特徴をもとに初期値の範囲を設定し、周期解計算を効率的に行っている。

4.2 周期解の考察

図5の周期解計算結果を考察する。走行速度260km/hを起点として周期解の振幅の変化を追うと、速度213km/hに至るまでの間に振幅の大きさが5.5mmから5.0mmへと少しずつ減少していることが分かる。速度213km/hに至ると、それより低い速度では周期解が存在していない。一方で、速度213km/hで周期解を表す曲線は折り返され、今度は速度の上昇とともに周期解の振幅が減少していることが分かる。速度の上昇に伴って振幅が減少し、最終的にはその振幅が0に至る速度251km/hで周期解を表す曲線が消滅している。

ところで、シューティング法では安定解・不安定解が区別なく求められる。周期解に微小な外乱を与えたとき、最終的に周期解に漸近する場合が安定解であり、周期解に漸近することなく徐々に遠ざかる場合が不安定解である。以下では、得られた周期解を図5において点AからBの区間と点BからCの区間の2つの部分に分け、解の安定性の観点からその特徴を考察する。

(1) 速度の減少とともに周期解の振幅が減少する区間

図5の点Aから点Bまでの周期解は、蛇行動による定常振動解を表す。これは、蛇行動による定常振動に対して多少の外乱を与えても元の定常振動に収束する安定な周期解である。また、速度の減少に伴って周期解の振幅が徐々に減少しているが、これは実際の蛇行動試験で蛇行動の発生から減速して収束にいたるまでの様相と一致する。

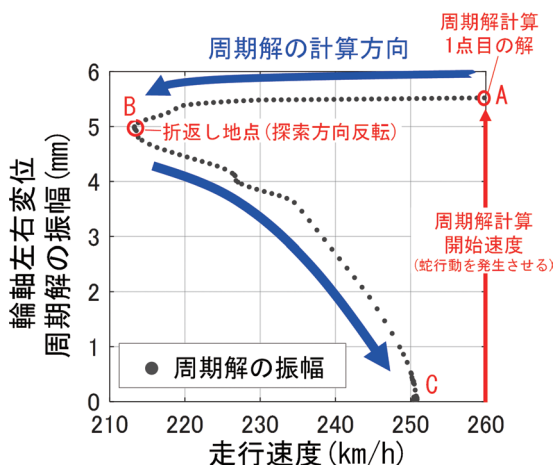


図5 周期解の計算結果

(2) 速度の増加とともに周期解の振幅が減少する区間

図5の点Bから点Cまでの周期解は、速度の上昇とともにその振幅が減少している。その様子は実験的に得られた蛇行動限界曲線の特徴に類似している。そこで、得られた周期解の軌道とその近傍から出発する軌道を検証する。例として、速度225km/h付近における周期解およびその近傍の軌道を図6に示す。図の緑色の実線は得られた周期解の軌道を示しており、一定の周回軌道上を時計回りに周回している。赤色の実線は緑色の周期解軌道に対してわずかに外側から出発した軌道を表しており、周期解軌道から離れながら時計回りに振幅が増大する方向へ進んでいることが分かる。また、灰色の実線は周期解軌道に対してわずかに内側から出発した軌道を表しており、周期解軌道から離れながら時計回りに中立位置に向かって振幅が減少していく様子が分かる。

以上のことから図6の緑の実線で示す周回軌道は不安定な周期解（不安定なりミットサイクル）であることが分かる。この周回軌道をわずかにでも外れるとそこから徐々に離れていく様子は、蛇行動限界曲線上の点近傍における輪軸の挙動と特徴が一致している。

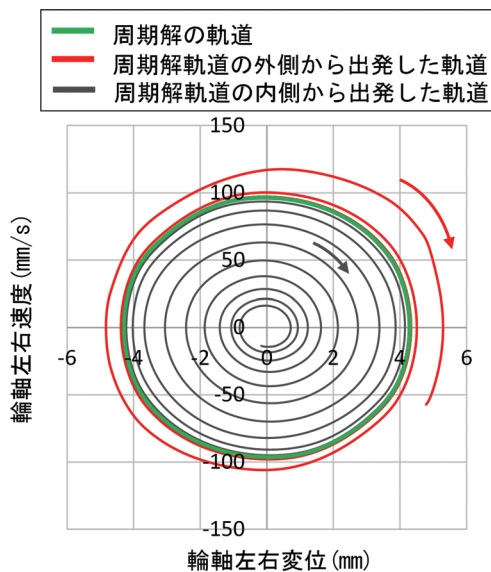


図6 周期解近傍の軌道

図5の点Bから点Cまでの周期解について、上記で取り上げた点以外の幾つかの点においても同様に不安定なりミットサイクルを形成していることを確認した。また、速度213km/h付近の周期解の曲線が折り返される点は垂直接線部でサドルノード分岐と呼ばれる分岐点であり、一般にサドルノード分岐点を境に安定性が反転する⁶⁾。これらを踏まえて周期解の安定性を全体に渡って推定した結果を図7に示す。蛇行動による定常振動が減速により消滅する点での振幅と不安定な周期解の振幅が

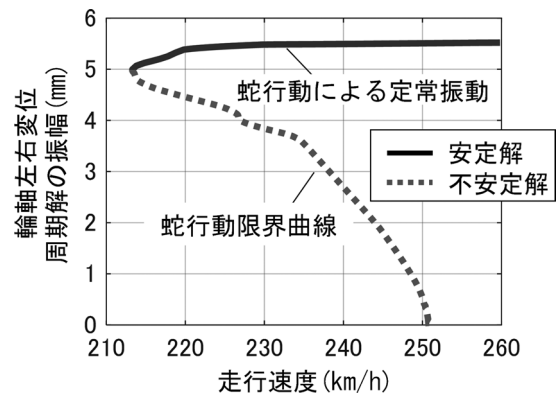


図7 周期解の安定性と蛇行動限界曲線

連続的に繋がっていることや、不安定な周期解の振幅が速度の増加に応じて減少し最終的に0になっていることは、実測の蛇行動限界曲線の特徴と合致している。したがって、本手法によって蛇行動の定常振動と蛇行動限界曲線が算出可能であること、また蛇行動限界曲線そのものは不安定な周期解として現れることが分かった。

5. まとめ

蛇行動限界曲線を算出することを目的として、非線形系の周期解計算手法であるシューティング法を半車体条件の運動モデルに適用し、周期解を計算した。その結果、走行速度の上昇に応じて振幅の大きさが減少する不安定な周期解が存在してそれが蛇行動限界曲線に相当することが分かり、本手法が概ね妥当であることを確認した。

今後は、摩耗踏面などより実態に即した蛇行動限界曲線の導出に取り組んでいく予定である。

文献

- 1) 山長雄亮, 木戸和哉: 蛇行動限界速度評価における加振条件の影響, 鉄道総研報告, Vol.32, No.8, pp.35-40, 2018
- 2) 山長雄亮: 非線形性を考慮した蛇行動安定性解析, 第29回交通・物流部門大会 (TRANSLOG2020) 講演論文集, No.1202, 2020
- 3) 日本機械学会編: 非線形系のダイナミクス, コロナ社, pp.46-63, 2007
- 4) 近藤孝広, 矢ヶ崎一幸: 非線形振動とカオスに関する二, 三の最近の話題, 日本機械学会論文集C編, Vol.61, No.583, pp.746-751, 1995
- 5) 日本機械学会編: 鉄道車両のダイナミクス, 電気車研究会, pp.20-28, 1994
- 6) ストロガッツ: 非線形ダイナミクスとカオス, 丸善出版, 2015