

しゅう動摩擦が作用するパンタグラフの安定性解析

小林 樹幸* 臼田 隆之*

Stability Analysis of Pantograph under Sliding Friction

Shigeyuki KOBAYASHI Takayuki USUDA

The friction force due to sliding of the pantograph head and contact wire acts to the traveling pantograph head in horizontal direction. Therefore, vertical motion of the pantograph head is generated by link mechanism of the pantograph. This study proposes a 2-dimensional pantograph model that considers friction characteristics of the pantograph head based on the multi-body dynamics (MBD) approach. Furthermore, a stability analysis method for the pantograph model is proposed. Results of the stability analysis of the developed MBD pantograph models are shown. Then the obtained stability is validated based on the time history simulation of the pantograph models.

キーワード：パンタグラフ、しゅう動摩擦、マルチボディダイナミクス、安定性解析、固有値

1. はじめに

パンタグラフは、舟支えリンク、釣り合い棒、上枠および下枠によって構成されるリンク機構を用いて舟体の上下運動を実現している。パンタグラフは、舟体の上面に取り付けられるすり板をトロリ線に接触させることで車両へ電力を供給する。列車が走行する際にはトロリ線とすり板の接触点はトロリ線上を移動し、この時しゅう動による摩擦力が発生する。前後方向の摩擦力が舟体に作用すると、その力に連成してパンタグラフに上下方向の運動が生じる。そのため、架線と舟体間の摩擦係数が大きいなどの条件下では走行中のパンタグラフが不安定な挙動を示すことがある。

パンタグラフの架線に対する追従性能をシミュレーションによって解析する際には、多質点系¹⁾やマルチボディダイナミクス²⁾に基づいてパンタグラフをモデル化する。これらの手法は、パンタグラフの追従振幅³⁾等を評価する際に適切な手法である。しかし、しゅう動摩擦に起因したパンタグラフの自励振動や不安定性を考慮可能な手法は確立されていないため、筆者らにより研究が進められている⁴⁾。

本報告では、パンタグラフ舟体に対して前後方向に作用するしゅう動摩擦力に連成して発生するパンタグラフの上下運動を表現可能な、2次元のマルチボディダイナミクス（以下、MBD）モデルを示す。さらに、構築したパンタグラフモデルの安定性を判別する手法についても示す。

2. しゅう動摩擦を考慮した MBD モデル

2.1 モデルの概要

本報告では図1に示すように、しゅう動摩擦と上下運動の連成を表現するシングルアームパンタグラフのモデルをMBDに基づいて提案する。なお本報告では、架線は剛体架線であるものと仮定する。図1のMBDモデルの各要素に関する名称を表1に、各要素の拘束条件を表2に記す。

本モデルでは、下枠、上枠、釣り合い棒、舟支えリンク、舟体可動部を剛体で定義し、これらを互いに回転ジョイントで結合する。各部材は図1のx-y平面内における並進および回転自由度の合計3自由度を有する。下枠と釣り合い棒の下部はそれぞれ、グラウンドに拘束された台枠に対して回転ジョイントで結合される。本モデルにおいて舟体と架線との接触は、図1に示す接触要素cを用いたペナルティ法によって表現する。摩擦モデルはクーロン摩擦と仮定し、接触力に比例したしゅう動摩擦力が舟体前後方向に作用する。しゅう動摩擦力が作用する方向は、パンタグラフの進行方向に応じて決定する。すな

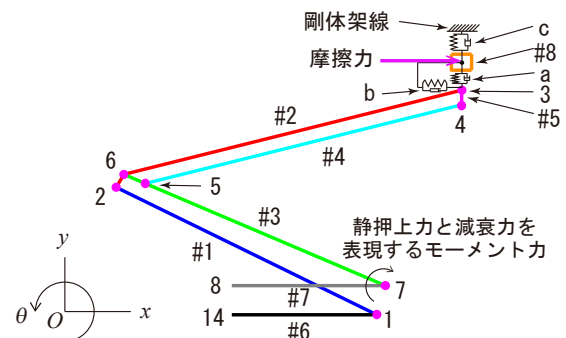


図1 パンタグラフの MBD モデル

* 鉄道力学研究部 集電力学研究室

表1 モデルを構成する要素の名称

番号	名称
#1	釣り合い棒
#2	上枠
#3	下枠
#4	舟支えリンク
#5	
#6	台枠
#7	
#8	舟体
a	舟支えを支持する剛性
b	
c	

表2 MBDモデルの拘束条件

番号		拘束条件
#1	#2	回転ジョイント
#2	#3	
#3	#4	
#4	#5	
#1	#6	
#3	#7	
#6	#7	
#7		

わち、図1においてパンタグラフが左方向（以下、なびき方向）に走行する場合には、図1に示すようにxの正方向に対してしゅう動摩擦力を作用させ、右方向（以下、反なびき方向）に走行する場合にはxの負方向に対してしゅう動摩擦力を作用させる。舟体に作用するしゅう動摩擦力は、x方向の接触要素（図1に示すb）を介して上枠へ伝達される。また、舟体と上枠の間には、舟体を支持するばねの等価剛性とエネルギー散逸を表現するための、ばね・ダッシュポットの並列要素aをy方向に設ける。

本モデルではパンタグラフに静押上力を与えるために、下枠を表わす部材#3に対して一定のモーメントを作用させる。また、パンタグラフダンパを表現するために、部材#3の回転角速度に比例した減衰力をモーメントとして部材#3に与える。

本報告では、微分代数方程式⁵⁾と線形動力学方程式⁶⁾を用いてMBDモデルを定式化する。パンタグラフのMBDモデルを微分代数方程式と線形動力学方程式で定式化した場合には、それぞれ以下の活用方法が考えられる。

線形動力学方程式を用いることで、不安定挙動の発生の有無を固有値解析に基づいて判別できる⁷⁾。微分代数方程式を用いて不安定挙動を判別するためには時間積分

に基づく運動シミュレーションを行う必要があることから解析に時間を要するのに対し、線形動力学方程式を用いる場合には運動シミュレーションを行う必要がないため不安定性の判別に時間を要さないという利点がある。ただし、微分代数方程式では、パンタグラフに不安定挙動が発生した際の各部材の時刻歴応答を観察することで、不安定挙動の現象把握を行うことができる。

2.2 微分代数方程式による定式化

MBDでは、系の拘束条件式は次式のような代数方程式で与えられる。

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{q} は系全体の一般化座標ベクトルであり、図1に示すモデルについては式(2)のように定義される。

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ \dots \ x_8 \ y_8 \ \theta_8]^T \quad (2)$$

ただし、 x_i, y_i, θ_i ($1 \leq i \leq 8$)はそれぞれ、部材*i*のx方向変位、y方向変位、回転角を表わす。系全体の運動方程式は式(3)で表わされる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}^{(C)} + \mathbf{Q}^A \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{M}, \mathbf{Q}^{(C)}, \mathbf{Q}^A$ はそれぞれ、系全体の質量行列、拘束力ベクトル、外力ベクトルを表わす。本報告では式(3)で表わされる拘束多剛体系の運動を計算するために、拘束条件のもとで方程式を解く手法であるラグランジュの未定乗数法を用いる。運動方程式(3)に対して、仮想仕事の原理とラグランジュの未定乗数法を適用し、整理すると次式のように運動方程式(3)から変数を拡大した形で運動方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^A \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし $\boldsymbol{\gamma}$ は次式で定義される。

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{d\Phi_{\mathbf{q}}}{dt} \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\Phi_t}{dt} \quad (5)$$

また、 $\Phi_{\mathbf{q}}$ と Φ_t はそれぞれ Φ の \mathbf{q} と t に関する偏微分を表し、 $\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュの未定乗数を表わす。

微分代数方程式を用いてMBDモデルを定式化する場合、式(5)に基づいてモデルの運動を計算する。本報告では4次のルンゲ・クッタ法を用いて時間積分を行い、時間刻みを0.2msとする。

2.3 線形動力学方程式による定式化

図1のモデルでは、ばね・ダッシュポットの並列要素a、bおよびcが部材#8の重心に接続されており、しゅう動摩擦力も部材#8の重心に作用する。モデルの各部材に微小変位および微小回転角が生じるものと仮定する

と、モデルの運動方程式は式(6)で表わされる。

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\delta\mathbf{q} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^A \quad (6)$$

ここで $\delta\mathbf{q}$ は一般化座標ベクトルの微小変化量を表し、 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} はそれぞれ全体座標系における剛性行列と減衰行列を表わす。

式(6)の左辺第4項には拘束力の項が含まれるため、固有値解析を行うことができない。そこで、式(6)の固有値解析を可能とするために拘束力ベクトルを消去することを考える^{6) 8)}。 Φ_q^T をQR分解すると次式になる。

$$\Phi_q^T = [\mathbf{Q}_u \quad \mathbf{Q}_v] \mathbf{R} \quad (7)$$

ただし \mathbf{Q}_u は n 行 m 列 (n は系の全自由度数、 m は拘束条件の数)、 \mathbf{Q}_v は n 行 $n - m$ 列の行列である。

本報告では、 \mathbf{Q}_u と \mathbf{Q}_v の列ベクトルの直交性を利用して、一般化座標で記述された式(6)から拘束力の項を消去する⁸⁾。そこで、次式の関係を満たす新たな座標系 \mathbf{v} を定義する。

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_v \mathbf{v} \quad (8)$$

この座標系 \mathbf{v} を用いて運動方程式(6)を表現すると、次式のように拘束力の項を含まない運動方程式が得られる。

$$\hat{\mathbf{M}}\delta\ddot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{C}}\delta\dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{K}}\delta\mathbf{v} = \hat{\mathbf{Q}}^A \quad (9)$$

ここで $\hat{\mathbf{M}}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}$ 、 $\hat{\mathbf{K}}$ 、 $\hat{\mathbf{Q}}^A$ はそれぞれ式(10)～式(13)のように定義した。

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}_v^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_v \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}_v^T \mathbf{C} \mathbf{Q}_v \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}_v^T \mathbf{K} \mathbf{Q}_v \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}^A = \mathbf{Q}_v^T \mathbf{Q}^A \quad (13)$$

式(9)のように拘束力を含まない運動方程式は固有値解析を行うことが可能である。

3. 複素固有値に基づく安定性解析手法

本報告において摩擦力を表現する剛性行列は、直交する x 方向と y 方向との運動の連成を表現することから、非対称な行列になる。したがって、式(12)の $\hat{\mathbf{K}}$ は非対称行列となる。このような非対称行列を含む系の固有値は複素数となり、その実部はモード減衰率の負値を表わす。そのため、複素固有値の実部が正の場合には減衰率が負であることを意味し、系の複素固有値が1つでも正の実部を有する場合には、系が不安定になることがわか

る。また、複素固有値の実部が正の場合にその絶対値が大きいほど系の不安定性が高くなる。そこで本報告では、実部が正の複素固有値のうち最大となる実部の値を不安定性指標と定義することでモデルの安定性評価を行う。ただし、複素固有値の実部がすべて負であり、系が安定である場合には不安定性指標を0と定義する。

4. パンタグラフの安定性解析

4.1 対象とするパンタグラフモデル

本章では図2に示すように2通りの力学モデルを用いることで、これらのパンタグラフの安定性評価結果を比較する。図2(a)は図1と同じモデルであり、新幹線用シングルアームパンタグラフをモデル化したものである。以降では、図2(a)に示すモデルを標準モデルと称する。図2(b)は、不安定現象を再現するために、標準モデルの上枠と舟支えリンクの長さを延長したものである。図2(b)に示すモデルを上枠延長モデルと称する。なお、標準モデルと上枠延長モデルの上枠の長さは、それぞれ1.2mと1.6mである。

本報告では、実機パンタグラフの舟体中央を加振して得られたコンプライアンスと線形動力学方程式によって定式化された標準モデルのコンプライアンスが一致するように、標準モデルのパラメータの値を決定した。各モデルの部材に関するパラメータを表3に、ばね・ダッシュポットの並列要素に関するパラメータを表4にまとめる。

4.2 安定性解析結果

4.2.1 MBDモデルの不安定性指標

MBDモデルの摩擦係数を0から3の範囲内で0.01刻みで変化させて、モデルの安定性解析を行った。不安定性指標に基づく安定性評価結果を、標準モデルと上枠延

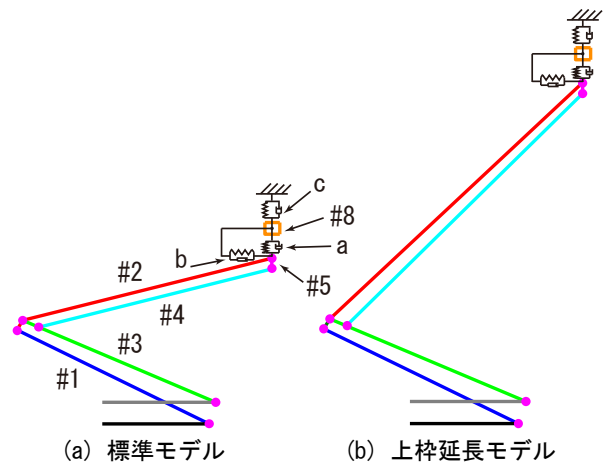


図2 安定性解析に用いる MBD モデル

表3 MBDモデルのパラメータ

部材	標準モデル		上枠延長モデル	
	質量 (kg)	慣性モーメント (kg m ²)	質量 (kg)	慣性モーメント (kg m ²)
釣り合い棒 (#1)	2.47	0.21	2.47	0.21
上枠 (#2)	10.51	0.81	13.97	1.91
下枠 (#3)	6.50	0.52	6.50	0.52
舟支えリンク (#4)	1.36	0.14	1.81	1.85
舟支えリンク (#5)	1.00	0.02 x 10 ⁻¹	1.00	0.02 x 10 ⁻¹
舟体 (#8)	3.00	0.01	3.00	0.01

表4 ばね・ダッシュポット並列要素のパラメータ

要素番号	剛性 (kN/m)	減衰 (Ns/m)
a	105	50
b	500	500
c	500	500

長モデルについて図3に示す。図3(a)および図3(b)より、新幹線用シングルアームパンタグラフに基づく標準モデルは摩擦係数が0から3の範囲においては、走行方向によらず系が安定であることがわかる。一方、図3(c)のように、上枠延長モデルがなびき方向に走行する場合には摩擦係数が0から3の範囲においては系が安定であるのに対し、上枠延長モデルが反なびき方向に走行する場合には摩擦係数が2.45以上でモデルが不安定になることが図3(d)より示された。

4.2.2 時刻歴シミュレーションと不安定性指標の比較

微分代数方程式で定式化した標準モデルと上枠延長モデルの時刻歴シミュレーションを行い、安定性評価手法の妥当性を検証する。事前の検討により、微分代数方程式でパンタグラフをモデル化した際に、上枠延長モデル

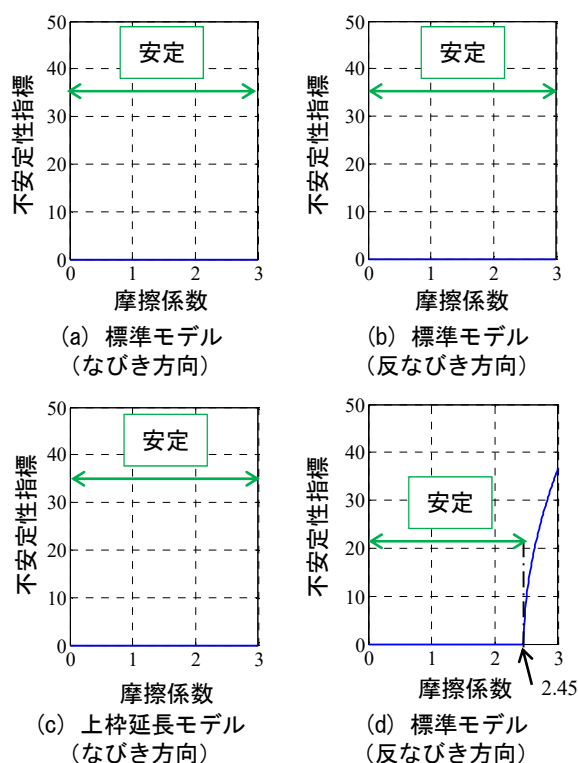


図3 各 MBD モデルの不安定性指標

が反なびき方向に走行する場合には摩擦係数が2.49以上で系が不安定になることがわかったため、ここでは摩擦係数を1, 2.48, 2.49の3通りとする。

時刻歴シミュレーションの流れを以下にまとめる。

- (a) パンタグラフ舟体上面が剛体架線のしゅう動面から1mm下方にあり、パンタグラフが停止している状態から時刻歴シミュレーションを開始する。シミュレーション開始後、静押上力によってパンタグラフが上昇する(図4(a))。
- (b) パンタグラフが剛体架線(接触要素)に着線する。舟体に作用する接触力がほぼ一定値に収束するまで、パンタグラフを走行させない(図4(b))。
- (c) パンタグラフが剛体架線下を走行する状況を模擬す

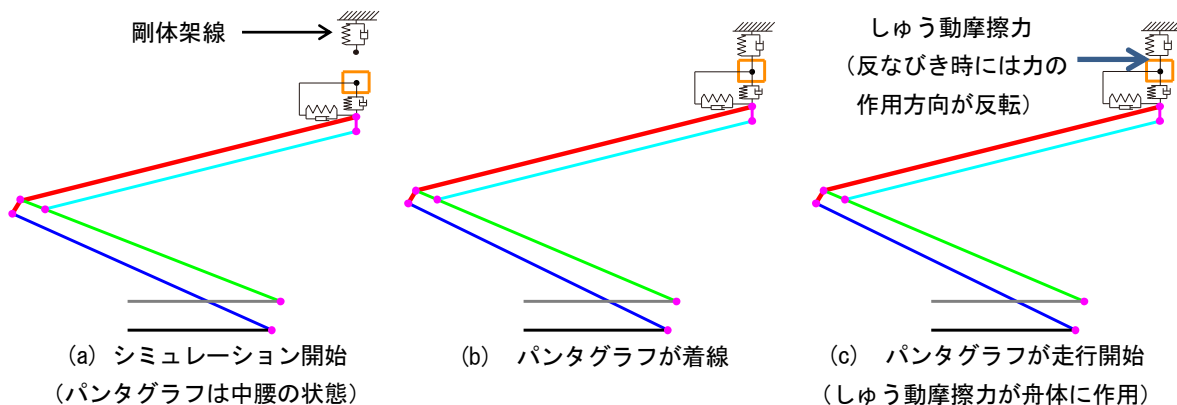


図4 時刻歴シミュレーションの流れ

るために、接触力に比例したしゅう動摩擦力を舟体重心に作用させる（図4(c)）。

シミュレーションによって得られた標準モデルと上枠延長モデルの接触力を図5に示す。本シミュレーションでは、接触力が時間と共に一定値へ収束する場合にシステムは安定であり、接触力が時間と共に増幅する場合に不安定と定義する。

図5(a)と図5(b)より、標準モデルに関してはパンタグラフの進行方向によらず、またいずれの摩擦係数においても系は安定であることがわかる。いっぽう、上枠延長モデルについては、パンタグラフがなびき方向に走行する場合には摩擦係数によらず系は安定であるのに対し（図5(c)）、反なびき方向に走行する場合には摩擦係数が2.49以上の場合には系が不安定である（図5(d)）。図5(d)において、摩擦係数が2.49の場合には1.2sが経過した時点でMBDモデルが離線したためシミュレーションを打ち切った。図3に示した安定性評価結果では摩擦係数が2.45以上のとき系が不安定であるのに対し、本時刻歴シミュレーションでは前述のように摩擦係数が2.49以上のとき系が不安定になる。以上の結果から、提案する安定性評価手法を用いることで、摩擦係数0.04程度の精度において系の安定性を判別できることがわかった。

4.2.3 MBDモデルの不安定性の要因に関する考察

前項では上枠延長モデルの方が標準モデルよりも不安

定になりやすい傾向にあることがわかった。そこで本項では、MBDモデルの各物理量を観察することで不安定化に関する考察を行うとともに、不安定化に寄与する要因をパンタグラフの頂点軌跡に基づいて考察する。

図6に、上枠延長モデルが摩擦係数2.48および2.49の条件下で反なびき方向に走行する場合の時刻歴シミュレーション結果を示す。図6には上段と下段にそれぞれ、舟体に作用する摩擦力と、舟体および舟支えの上下方向変位を示す。同図から、いずれの摩擦係数においてもしゅう動摩擦力の作用開始とともに摩擦力によって舟支えが大きく上方に変位することがわかる。摩擦係数が2.48の場合には舟体と舟支え間の相対変位に起因する復元力によって振動が発生し、粘性抵抗力によって時間と共に振動が減衰する。しかし、摩擦係数が2.49の場合には、摩擦力に連成して発生する舟体を押し上げる力が増加することで、ばね・ダッシュポットの並列要素aの反力が顕著に増加してパンタグラフ枠組が押し下げられることでMBDモデルが離線する。

図7には、標準モデルと上枠延長モデルの舟体の頂点軌跡を示す。ここでは、図2に示す姿勢の舟体位置を上下変位および前後変位の原点とする。標準モデルが反なびき方向に走行して前後方向の負の向きに摩擦力が作用するとパンタグラフは降下するのに対し、上枠延長モデルが反なびき方向に走行して前後方向の負の向きに摩擦力が作用するとパンタグラフは上昇する。このような頂

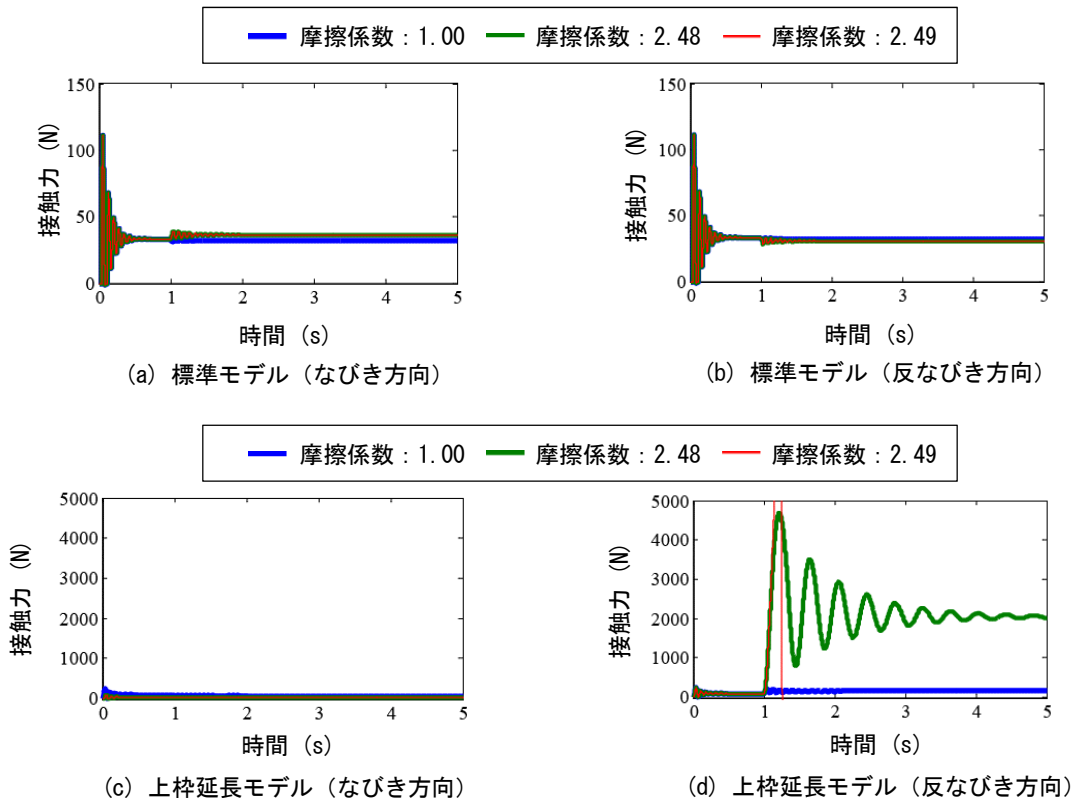


図5 時刻歴シミュレーションによる接触力の計算結果

特集：鉄道力学

点軌跡の相違に加えて、頂点軌跡の傾きがモデルの不安定性に影響するものと考えられるため、この検討については今後の課題とする。

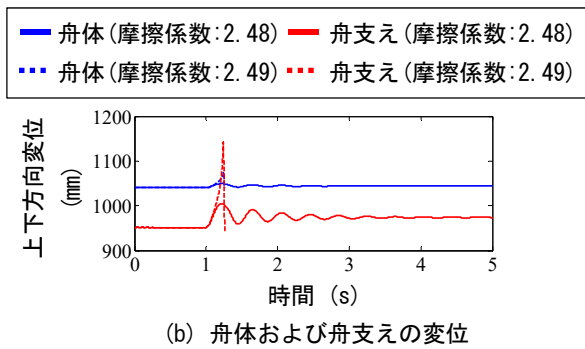
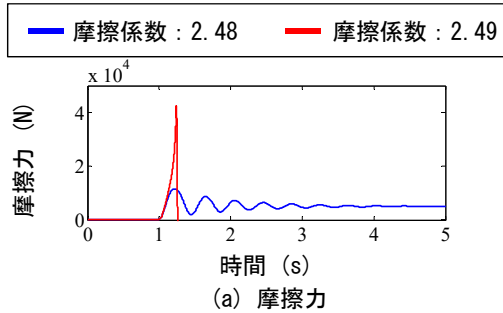
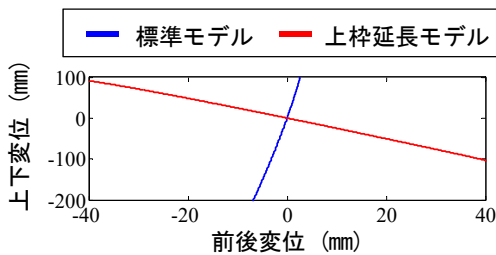


図6 上枠延長モデルの時刻歴シミュレーション結果
(進行方向：反なびき方向)



5. まとめ

本報告では、パンタグラフ舟体の前後方向に作用するしゅう動摩擦力に連成して発生するパンタグラフの上下運動を表現可能な力学モデルを、2次元のマルチボディダイナミクス (MBD) に基づいて提案した。さらに、複素固有値に基づくパンタグラフモデルの安定性評価手法を提案した。本手法では、パンタグラフモデルの複素固有値の実部が負の場合には系が安定であり、正の場合には系が不安定であるという評価を行うことができる。系の安定性は時刻歴シミュレーションを行うことも評価することができるが、一般的に時刻歴シミュレーションは計算コストが極めて高いため、安定性評価には適していない。これに対して複素固有値に基づく安定性評価

手法は、計算量が小さいため安定性を短時間で評価でき、計算コストが低いというメリットがある。

本報告のまとめを以下に記す。

1. 摩擦モデルを含むシングルアームパンタグラフを MBD でモデル化し、微分代数方程式と線形動力学方程式でそれぞれ定式化した。
2. 複素固有値に基づくパンタグラフモデルの安定性評価手法を提案した。
3. パンタグラフモデルの安定性評価を行い、またパンタグラフモデルの時刻歴シミュレーションを別途実施することで、提案する安定性評価手法の妥当性を検証した。

今後は、パンタグラフが不安定になる条件を、パンタグラフの姿勢や質量・剛性・減衰の観点から調査する。これに基づいて、しゅう動摩擦力が作用する場合においても不安定挙動を示さないパンタグラフの設計指針を示す方針である。

文献

- 1) 網干光雄：パンタグラフ追随性能が接触力変動に与える影響，鉄道総研報告，Vol.18, No.8, pp.17-22, 2004
- 2) 長尾恭平，小山達弥，池田充：実機パンタグラフ共振試験による3次元パンタグラフシミュレーションモデルのパラメータ同定，日本機械学会第25回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集（2018），No.1309
- 3) 山下義隆，池田充：可変剛性ばねによるパンタグラフの追随性能向上（第二報：可変剛性ばねの開発とパンタグラフの動特性制御），日本機械学会論文集C編，Vol.78, No.789, pp.1831-1838, 2012
- 4) 小林樹幸，白田隆之，山下義隆：しゅう動摩擦が作用するパンタグラフの安定性評価，第27回交通・物流部門大会（TRANSLOG2018），U00012, 2018
- 5) Shabana, A., A., “Dynamics of Multibody Systems Third Edition,” Cambridge University Press, 2005.
- 6) Kang, J., S., Bae, S., Lee, J., M. and Tak, T., O., “Force Equilibrium Approach for Linearization of Constrained Mechanical System Dynamics,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol.125, pp.143-149, 2003.
- 7) 古屋耕平，新谷浩平，伊藤聡：剰余剛性を考慮した部分構造合成法によるブレーキ鳴き複素固有値問題の高精度求解，日本機械学会論文集，Vol.80, No.819, DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0328, 2014
- 8) 池澤知徳，吉村卓也：MBDと感度解析を用いた自動車用サスペンションの振動特性最適化（固有値最適化問題への適用），日本機械学会論文集C編，Vol.74, No.740, pp.897-903, 2008