

交流電車主変圧器の等価回路導出に関する考察

廿日出 悟*

A Study on the Derivation of the Equivalent Circuit of the Traction Transformers on AC Railcars

Satoru HATSUKADE

Calculating the harmonics of traction current from AC electric railcars are necessary for predicting interferences to telecommunication systems and railway track circuits. A method called “Reactance matrix method” has been available instead of circuit simulators in Japan for a long time. The Reactance matrix represents the short-circuit inductances derived from the simultaneous equations of the electric circuit of the traction transformer. This report describes a study of the derivation on the equivalent circuit of the traction transformer from the Reactance matrix. The paper first shows the matrix operator between the Reactance matrix and the inductance matrix, which is the most essential matrix of the transformer. Next this also shows that the same matrix operator derives the admittance matrix from the Reactance matrix. The admittance matrix transforms easily into the coefficients of the equivalent polygonal circuit of the traction transformer.

キーワード：主変圧器，等価回路，リアクタンスマトリクス

1. はじめに

交流電化では、き電電圧を高く設定するため、交流電気車には降圧のための主変圧器が必要である。交流電気車の主回路と補助回路は電圧が異なるため巻線を別個に設ける。さらに、一台の主変圧器で複数の主回路用電力変換装置へ電力を供給する場合、電力変換装置毎に巻線を設ける。よって、主変圧器はき電（一次）側の巻線を含め3巻線以上の変圧器となっている。

変圧器の回路理論では、通常、変圧器を2巻線として考える。あるいは、三相変圧器の場合、励磁インダクタンスを無視して、漏れインダクタンスのYまたは Δ 結線の等価回路¹⁾で表現する。三相変圧器の等価回路を拡張した、4相以上の変圧器の等価回路^{2) 3)}も存在するが、巻線の対称性が条件になるため、主変圧器のように主回路用と補助回路用で変圧比が異なる場合は適用困難である。

交流電気車では、パワーエレクトロニクス導入時に、電力変換装置が発生する高調波による通信誘導障害、信号装置への誘導障害が懸念された。特にPWMコンバータの適用時に、高調波の抑制技術と共に高調波を計算する技術が求められた。

交流電気車の高調波を計算するために生み出された手法がリアクタンスマトリクス法である^{4) ~8)}。リアクタンスマトリクス法は、架線側回路と二次側または三次側回路を1つの閉回路と考えると回路方程式を立て、それらを全て連立させて解く手法である。連立方程式にPWM

コンバータのスイッチ状態の時間変化を反映しつつ、ルンゲクッタ法などにより解くことで、架線電圧1周期分の架線電流瞬時値が得られる。連立方程式を行列形式に変形すると、リアクタンスが正方行列に並ぶことから、この行列をリアクタンスマトリクスと呼んでいる。

リアクタンスマトリクス法は、主変圧器を各巻線の漏れインダクタンスをY結線した等価回路による計算よりも精度が良いことがわかった⁴⁾ことから、日本の鉄道業界では高調波計算手法の標準的存在となっている。

ところが、リアクタンスマトリクス法は回路を変更する度に連立方程式を導出する必要があるという課題がある。その一方、現在主流の電気回路シミュレータは抵抗やインダクタンスなどの回路素子を画面上で配置するだけで回路変更が可能であるほか、さらにはIGBTなどスイッチング素子の非線形性を含めた詳細な挙動も計算可能になっている。主変圧器を回路シミュレータに入力できれば高調波解析への適用範囲が大きく広がることが期待でき、そのためには主変圧器を等価回路で表現する必要がある。

本報告では、まず、変圧器の基本的な回路方程式からリアクタンスマトリクスの導出過程を行列操作で表現する。次に、リアクタンスマトリクスを行列操作することによってアドミタンス行列が得られ、主変圧器の等価回路導出が可能であることを示す。リアクタンスマトリクスからアドミタンス行列の導出は数学的な行列操作で、操作に規則性があることから、任意の巻線数において統一的な操作で導出が可能である。

* 車両制御技術研究部 駆動制御研究室

特集：車両技術

2. リアクタンスマトリクス法について^{4)~9)}

リアクタンスマトリクス法は図1のような二次側に m 個の巻線をもつ多巻線変圧器において、二次側換算した回路方程式を m 本連立させ収束計算することにより架線電流を求める手法である。本稿では変圧器のみに着目し、その他の要素は省略する。図1中の記号の定義は以下のとおりである。

- E_p : 電源電圧 (実効値)
- x_{p0} : 電源側インダクタンス
- r_p : 一次巻線抵抗
- x_p : 一次巻線自己インダクタンス
- x_{pi} : 一次巻線と i 番目の二次巻線との相互インダクタンス
- r_{si} : i 番目二次巻線の巻線抵抗
- x_{sii} : i 番目二次巻線の自己インダクタンス
- x_{sij} : i 番目巻線と j 番目巻線との相互インダクタンス
- a_i : 巻数比 (一次側巻数 = n, 二次側巻数 = 1 のとき $a_i = n$)
- i_p : 一次電流
- i_{si} : i 番目の二次巻線の電流
- e_{di} : i 番目の二次巻線の電圧
- R_{ij} : 二次換算抵抗
- X_{ii} : 一次巻線と i 番目二次巻線との等価漏れリアクタンス
- X_{ij} : i 番目巻線と j 番目巻線との等価相互リアクタンス
- θ : 電源位相

図1において i 番目の二次巻線電圧 e_{di} は架線側電源から各種電圧降下を引き算することにより、(1)式で表すことができる。電流を θ で微分するのはリアクタンスマトリクス法が電源1周期分を計算すること由来しており、時刻 t で微分しても本報告における議論には影響がない。

$$e_{di} = \frac{1}{a_i} \left\{ \sqrt{2}E_p \sin \theta - r_p i_p - (x_{p0} + x_p) \frac{di_p}{d\theta} + \sum_{j=1}^m x_{pj} \frac{di_{sj}}{d\theta} \right\} + x_{pi} \frac{di_p}{d\theta} - r_{si} i_{si} - \sum_{j=1}^m x_{sij} \frac{di_{sj}}{d\theta} \quad (1)$$

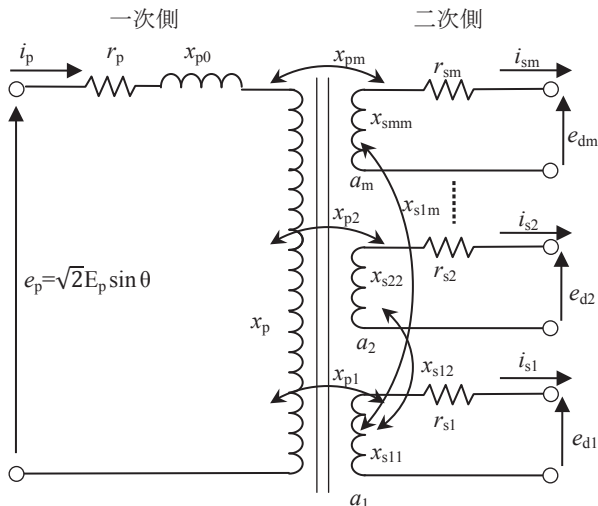


図1 多巻線変圧器

架線電流 i_p は励磁電流を無視すると二次巻線電流を変圧比 a_i で除したものの総和に等しく、(2)式の関係がある。

$$i_p = \sum_{j=1}^m \frac{i_{sj}}{a_j} \quad (2)$$

(1)式の i_p を消去し、整理すると(3)式が得られる。

$$e_{di} = \frac{\sqrt{2}E_p \sin \theta}{a_i} - \left(\sum_{j=1}^m \frac{r_p}{a_i a_j} i_{sj} + r_{si} i_{si} \right) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{x_{p0} + x_p}{a_i a_j} - \frac{x_{pi}}{a_i} - \frac{x_{pj}}{a_j} + x_{sij} \right) \frac{di_{sj}}{d\theta} \quad (3)$$

(3)式を二次巻線数分作成し、行列表記とすると(4)式を得る。

$$\begin{pmatrix} e_{d1} \\ \vdots \\ e_{di} \\ e_{dj} \\ \vdots \\ e_{dm} \end{pmatrix} = \sqrt{2}E_p \sin \theta \begin{pmatrix} 1/a_1 \\ \vdots \\ 1/a_i \\ 1/a_j \\ \vdots \\ 1/a_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1i} & R_{1j} & \cdots & R_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{i1} & \cdots & R_{ii} & R_{ij} & \cdots & R_{im} \\ R_{j1} & \cdots & R_{ji} & R_{jj} & \cdots & R_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m1} & \cdots & R_{mi} & R_{mj} & \cdots & R_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s1} \\ \vdots \\ i_{si} \\ i_{sj} \\ \vdots \\ i_{sm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1i} & X_{1j} & \cdots & X_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{i1} & \cdots & X_{ii} & X_{ij} & \cdots & X_{im} \\ X_{j1} & \cdots & X_{ji} & X_{jj} & \cdots & X_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mi} & X_{mj} & \cdots & X_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{s1}/d\theta \\ \vdots \\ di_{si}/d\theta \\ di_{sj}/d\theta \\ \vdots \\ di_{sm}/d\theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

右辺の各行列の要素は(5)式、(6)式で計算できる。

$$R_{ij} = \frac{r_p}{a_i a_j} + r_{si} \quad (5)$$

$$X_{ij} = \frac{x_{p0} + x_p}{a_i a_j} - \frac{x_{pi}}{a_i} - \frac{x_{pj}}{a_j} + x_{sij} \quad (6)$$

(4)式の X_{ij} を要素とする行列をリアクタンスマトリクス (X) と呼ぶ。

3. リアクタンスマトリクスを得る行列操作

変圧器の最も基本的な定数は図1の巻線自己インダクタンス x_p, x_{sii} と巻線間相互インダクタンス x_{pi}, x_{sij} である。これらを行列形式にしたものをインダクタンスマトリクス (L) と呼ぶことにする。この章では、インダクタンスマトリクスからリアクタンスマトリクスを導出する過程を行列操作で表現する。

そのために、まず、2巻線変圧器と3巻線変圧器の回路方程式を検討し、それを拡張することで一般の巻線数での行列操作を得る。なお、図1の電源側インダクタンス x_{p0} は架線や変電所のインダクタンスであり変圧器と

は無関係であるため省略する。以上の行列操作は文献⁹⁾で検討済みであるが、本報告ではリアクタンスマトリクスに含まれない等価抵抗 R_{ij} の変換行列もリアクタンスマトリクスを得る行列操作であることの証明を追加した。

3.1 2巻線変圧器の場合⁹⁾

二次側の巻線が一つだけの2巻線変圧器(図2)の回路方程式は(7)式である。右辺第2項の符号が負である理由は i_{s1} が巻線より流出する向きを正としているからである。

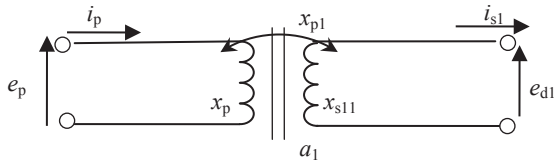


図2 2巻線変圧器

$$\begin{cases} e_p = x_p \frac{di_p}{d\theta} - x_{p1} \frac{di_{s1}}{d\theta} \\ e_{d1} = x_{p1} \frac{di_p}{d\theta} - x_{s11} \frac{di_{s1}}{d\theta} \end{cases} \quad (7)$$

(7)式を行列で表すと(8)式を得る。

$$\begin{pmatrix} e_p \\ e_{d1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} \\ x_{p1} & -x_{s11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_p}{d\theta} \\ \frac{di_{s1}}{d\theta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

次に、(8)式に一次電圧と二次電圧の関係を用いて e_p の行を消去する。

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_p \\ e_{d1} \end{pmatrix} = (-1/a_1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} \\ x_{p1} & -x_{s11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_p}{d\theta} \\ \frac{di_{s1}}{d\theta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

励磁電流を無視すると2巻線の電流には $i_p = i_{s1}/a_1$ の関係があるので、これを用いて(9)式右辺の i_p の行を置き換える。

$$\begin{pmatrix} -1/a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_p \\ e_{d1} \end{pmatrix} = (-1/a_1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} \\ x_{p1} & -x_{s11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{di_{s1}}{d\theta} \quad (10)$$

(10)式を展開し(11)式を得ると、(11)式の右辺第2項の係数が(6)式の X_{ij} と一致することがわかる。

$$e_{d1} = \frac{e_p}{a_1} - \left(\frac{x_p}{a_1^2} - \frac{x_{p1}}{a_1} - \frac{x_{p1}}{a_1} + x_{s11} \right) \frac{di_{s1}}{d\theta} \quad (11)$$

(11)式において変圧比 a_1 を1, 自己インダクタンス L_1, L_2 , 相互インダクタンスを M と書くと右辺第2項は $L_1 - 2M + L_2$ になる。したがって、(11)式右辺第2項の係数は短絡インダクタンスである。

3.2 3巻線変圧器の場合⁹⁾

二次巻線が2つある, 3巻線変圧器(図3)も3.1節と同様に計算できる。

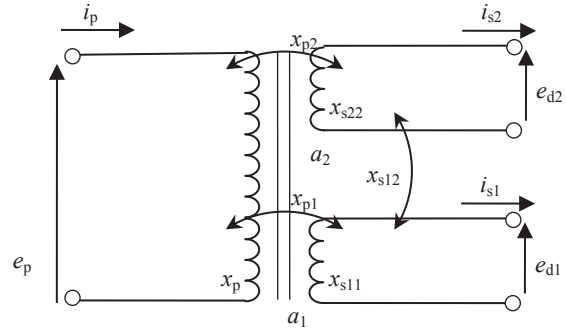


図3 3巻線変圧器

行列形式の回路方程式は(12)式である。

$$\begin{pmatrix} e_p \\ e_{d1} \\ e_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} & -x_{p2} \\ x_{p1} & -x_{s11} & -x_{s12} \\ x_{p2} & -x_{s12} & -x_{s22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_p}{d\theta} \\ \frac{di_{s1}}{d\theta} \\ \frac{di_{s2}}{d\theta} \end{pmatrix} \quad (12)$$

2巻線変圧器と同様に変圧比と、励磁電流を無視した一次・二次電流の関係 $i_p = i_{s1}/a_1 + i_{s2}/a_2$ を用いると(13)式を得る。

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_p \\ e_{d1} \\ e_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} & -x_{p2} \\ x_{p1} & -x_{s11} & -x_{s12} \\ x_{p2} & -x_{s12} & -x_{s22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_1 & 1/a_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_{s1}}{d\theta} \\ \frac{di_{s2}}{d\theta} \end{pmatrix} \quad (13)$$

行列の結合則により変形すると, 3巻線変圧器のリアクタンスマトリクス X_3 は次の(14)式で表される。 X_3 は2行2列である。右辺の負符号は(4)式に行列 X_{ij} の前に負符号があるためである。

$$X_3 = (-1) \begin{pmatrix} -1/a_1 & 1 & 0 \\ -1/a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} & -x_{p2} \\ x_{p1} & -x_{s11} & -x_{s12} \\ x_{p2} & -x_{s12} & -x_{s22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_1 & 1/a_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

行列内の特定の列を定数倍する操作, スカラーに対する交換則, 結合則を用いると, (15)式のように対称性のある変換行列が左右に出現する。

$$X_3 = \begin{pmatrix} -1/a_1 & 1 & 0 \\ -1/a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p & -x_{p1} & -x_{p2} \\ x_{p1} & -x_{s11} & -x_{s12} \\ x_{p2} & -x_{s12} & -x_{s22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/a_1 & -1/a_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

行列 (Y) は図4のように、 π 形等価回路に対応する。アドミタンス行列は並列接続が容易であり、端子数が増えても行列要素と等価回路定数との対応が容易である。

端子数の増加例として3端子対の回路網について考えると、図5のようになる。

図5のように各端子を結ぶ素子のアドミタンスが行列の非対角要素に対応し、各端子からグランド端子へのアドミタンスが、端子番号に対応する行のアドミタンス要素の和で計算できる。

4.2 アドミタンス行列への変換

リアクタンスマトリクスを用いた回路方程式は、行列形式で表すと(22)式であり、 e_p を左辺に移動して行列形式で表すと(23)式である。

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = e_p \begin{pmatrix} -1/a_1 \\ \vdots \\ -1/a_m \end{pmatrix} + X_{m+1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$AV = X_{m+1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} \quad (23)$$

リアクタンスマトリクスの逆行列を両辺の左から作用させる、積分形式に直すと(24)式である。

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} = (X_{m+1})^{-1} A \int V dt \quad (24)$$

(24)式は全巻線数より1少ないm行である。そこで一次電流と二次電流の関係を表す(2)式により i_p の行を追加する。二次電流の向きに注意すれば、 i_p の行を追加する変換行列は(25)式である。

$$A^T \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum \frac{i_j}{a_j} \\ i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} = I \quad (25)$$

(24)式の両辺に左から A^T を作用させて(26)式を得る。

$$I = P_{m+1} \int V dt \quad (26)$$

$$\text{ここで } P_{m+1} = A^T (X_{m+1})^{-1} A$$

(26)式はアドミタンス行列を用いた回路方程式 $I = YV$ と同じ形式であり、 P_{m+1} は図6のような多角形等価回路のパラメータに対応する。等価回路において各端子からグランド端子へのアドミタンス素子は省略されている。主変圧器に3次巻線が存在する場合は、3次巻線に対応する端子に2次側の電圧に変換する理想変圧器を挿入することで対応できる。

$$P_4 = \begin{pmatrix} y_{pp} & y_{p1} & y_{p2} & y_{p3} \\ y_{p1} & y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{p2} & y_{12} & y_{22} & y_{23} \\ y_{p3} & y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{pmatrix}$$

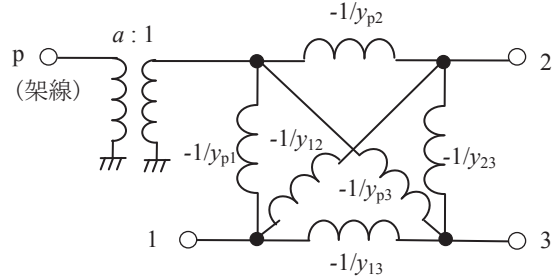


図6 変圧器の等価回路 (二次巻線数が3の場合)

4.3 変換例

この節では、文献掲載のリアクタンスマトリクスから、本論文の手法により等価回路を導出した例について述べる。文献⁸⁾に掲載された変圧器は実験用の変圧器で一次側200V、二次側110Vで二次巻線が4巻線の変圧器である。文献掲載のリアクタンスマトリクス(表1)及び本論文の手法により導いた(25)式の行列P(表2)から得られる等価回路を図7に示す。当該の変圧器が5巻

表1 リアクタンスマトリクス⁸⁾ (単位 μH)

204	65.5	3	-11.5
65.5	175	2.5	1
3	2.5	209	70.5
-11.5	1	70.5	180

表2 行列 P_5 (単位 H^{-1})

4742	-2063	-2332	-1732	-2496
-2063	5604	-2097	-207.5	450.9
-2332	-2097	6500	11.2	-174.5
-1732	-207.5	11.2	5522	-2176
-2496	450.9	-174.5	-2176	6438

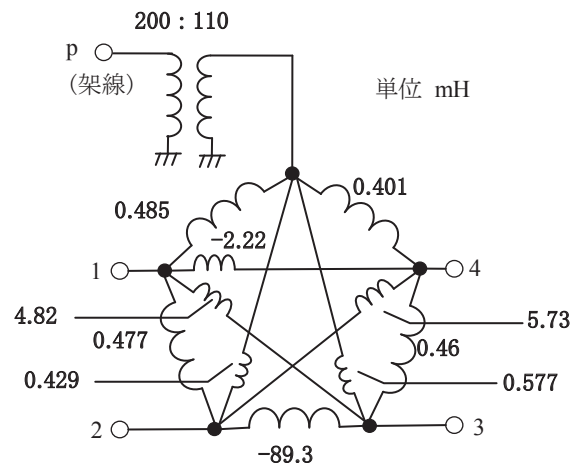


図7 変圧器の等価回路導出例

特集：車両技術

線であることから、等価回路は5角形の辺及び対角線にインダクタンスが付加される回路となった。1箇所だけ絶対値が大きなインダクタンスの部分（巻線2－巻線3間）は巻線間の相互結合が他に比べて弱いことを示している。

本報告に示していない巻線数の主変圧器も、図7と同様に等価回路に変換可能である。例えば巻線数が6の場合（例えば一次側1巻線＋二次側4巻線＋三次側1巻線）、六角形の辺及び対角線にインダクタンスが付与された等価回路となる。

なお、巻線間の基準電位が異なる回路構成の場合は、図8に示すように各二次巻線へ1:1の理想変圧器を挿入した等価回路を電気回路シミュレータへ入力することで対応可能である。

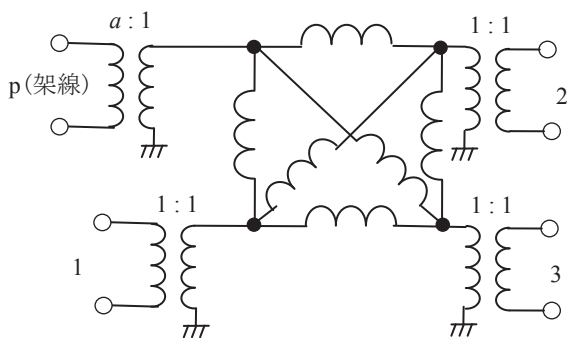


図8 巻線毎の基準電位が異なる場合の等価回路
(二次巻線数が3の場合)

5. おわりに

本報告では、交流電気車の主変圧器を等価回路で表現するための検討を行った。まず、交流電気車の高調波計算に対して従来から用いられているリアクタンスマトリクス法について、回路方程式を出発点とした導出過程を行列操作で整理した。次に、2端子対回路網の理論に用いられる行列のなかでアドミタンス行列に着目し、リアクタンスマトリクスからアドミタンス行列へ変換する行列操作を明らかにした。

本報告における検討は、交流電気車の高調波解析をSPICE等の汎用電気回路シミュレータで実施する目標に対し、リアクタンスマトリクスからインダクタンスマトリクスを再生できないかという着想から始まった。

検討過程でリアクタンスマトリクスが励磁インダクタンスの情報を持っていないことから再生が不可能と判明し、別の手段を探したところ、文献¹⁰⁾に掲載されてい

る行列とリアクタンスマトリクスが同一であることに気づき、等価回路導出過程が判明した。なお、文献⁹⁾にはインダクタンスマトリクス、リアクタンスマトリクスを含む行列と対応する等価回路の相互関係を図示しており、例えば多角形等価回路に励磁インダクタンスを付加したカンチレバーモデルも示している。

本報告により、過去に測定済みのリアクタンスマトリクスから多角形等価回路が導出可能であり、交流電気車の高調波解析を汎用電気回路シミュレータで実施可能になった。電気回路シミュレータの中にはスイッチング回路の計算に優れた電気回路シミュレータや、無償利用可能な電気回路シミュレータなどが存在することから、交流電気車の高調波解析の裾野が広がることを期待する。

文 献

- 1) 尾本, 宮入: “現代電気工学講座 電気機器 III”, pp. 252-260, オーム社, 1962
- 2) L. F. ブルエメほか, 変圧器技術研究会訳: “変圧器工学”, pp. 88-128, コロナ社, 1971
- 3) R.W. Erickson and D. Maksimovic, “A multiple-winding magnetics model having directly measurable parameters”, 29th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference (PESC 98), Vol.2, pp. 1472 - 1478, 1998.
- 4) 柿沼, 白井, 木下, 佐藤: 電算機による車両用主変圧器二次多分割制御車のシミュレーション, 第15回鉄道における国際サイバネティクス利用国内シンポジウム講演論文集, No. 501, pp. 349-353, 1978
- 5) 油谷, 石川, 豊島: PWN コンバータ式交流電気車電流の計算と実験結果の比較による高調波特性の一検討, 電気学会論文誌, Vol. 107-D, No. 3, pp. 312-319, 1987
- 6) 電気学会 交流電気鉄道用車両の高調波対策協同研究委員会: 交流電気鉄道用車両の高調波対策, 電気学会技術報告第676号, pp.24-27, 1998
- 7) 鉄道電化協会: 交流再生システムの研究, No. N76-10, pp.61-63, 1977
- 8) 油谷, 石川, 豊島: PWM コンバータ式交流電気車電流の計算と実験結果の比較による高調波特性の一検討, 電気学会論文誌 107D, No. 3, pp.312-319, 1987
- 9) 廿日出: 多巻線変圧器に関する等価回路と係数行列の相互関係, 電気学会 静止器研究会資料, No. SA-14-084, 2014
- 10) 稲垣恵造: 多巻線変圧器の定常時および励磁突入時の特性とその等価回路, 電気学会論文誌, Vol. 123-B, No. 6, pp. 742-748, 2003