

## 車輪・レール間の動的接触挙動評価

林 雅江\* 坂井 宏隆\* 高垣 昌和\*  
相川 明\*\* 奥田 洋司\*\*\* 殷 峻#

## Evaluation of Dynamic Behavior of the Wheel-Rail Rolling Contact

Masae HAYASHI Hiroataka SAKAI Masakazu TAKAGAKI  
Akira AIKAWA Hiroshi OKUDA Yin JUN

Contact between rail and wheel takes place in a very small area called “contact patch”. The rail and the wheel are exposed to a large impact load there. To clarify the initiation mechanism of the deteriorations of the rail or the wheel such as wear or crack, it is necessary to evaluate the mechanical behavior inside the contact patch under running impact load of the order of kHz. In our study, a dynamic rolling contact analysis method was developed based on three-dimensional finite element structural analysis software FrontISTR. For the verification of our methods, the analysis results were compared with those of the prior research and theoretical solutions. It is shown that our analysis results agree well with respect to the profile of the contact patch and the stress distribution. The result of the detailed distribution of tangential contact force is also reported.

キーワード：車輪，レール，コンタクトパッチ，三次元大規模有限要素法，並列計算

## 1. はじめに

列車の走行により繰り返し荷重を受けたレール表面や車輪表面には、摩耗やき裂といった損傷が生じる。こうした損傷は、騒音や振動の発生、乗り心地の悪化、異常な振動の発生、走行安全性の低下につながるため、その発生メカニズムの解明は鉄道システムの安心・安全に直結した課題である。車輪やレールの異常な摩耗やき裂の原因として、車輪・レール間に生じる衝撃力から発生する kHz オーダーの高周波振動や相対すべりといった接触面（コンタクトパッチ）内の力学的挙動が挙げられているが、未だ完全な現象解明には至っていない。その要因の一つとして、車両走行時におけるコンタクトパッチ内の応力分布や固着／すべり状態の評価が実験的に容易ではないことが挙げられる。

そこで本研究では、駆動力を考慮し加減速時の転動挙動が再現可能な三次元有限要素法接触解析プログラムを開発した。接触状態の評価においては、法線方向の接触力はラグランジュ未定乗数法で、接線方向の接触力はペナルティ法で求められる。また、レールの継ぎ目や波状摩耗などの不整を有するレール上を車輪が転動する際に生じる衝撃力を対象とするため、約 2kHz までの高周波数を対象とし、動的挙動の扱いには陰的時間スキームを

適用している。またわずか十～十数 mm 程度のコンタクトパッチを詳細に評価するため、接触面におけるメッシュサイズが 1mm 以下となる有限要素メッシュを用いる。これにより一軸一輪モデルでも数百万自由度となり、接触問題としては非常に大規模な数値計算となる。解析プログラムの分散並列化と、鉄道総研所有のスパコン CrayXC30 の活用により車輪・レール間の接触状態評価を可能とした。

## 2. 関連研究と本稿の目的

コンタクトパッチの応力分布や固着／すべり状態の評価には、これまでも多くの理論的・数値解析的なアプローチがなされてきた。古くには、任意形状の弾性体転がり接触解析プログラムである Kalker の CONTACT<sup>1)</sup> をはじめとし、車輪・レール間に非 Hertz 接触モデルを用いて接触応力やその分布、固着／すべり状態に着目した Piotrowski らの研究<sup>2)</sup> やレールの表面粗さを考慮し、生成される波状摩耗の深さやピッチを予測した Baeza らの研究<sup>3)</sup> などが既往研究として挙げられるが、弾性範囲、半無限体仮定での三次元化、ばねによる接触のモデル化などの仮定が含まれている。近年では、有限要素法による車輪・レールの三次元モデルを用い、より現実的な接触挙動を再現し、現象解明に結びつけようという研究事例もある。例えば、弾塑性を考慮して車輪・レール間の接触解析を行った Wiest らの研究<sup>4)</sup> では、弾性範囲での解析結果が CONTACT の結果とよい一致を見せ

\* 鉄道力学研究部 計算力学研究室  
\*\* 鉄道力学研究部 軌道力学研究室  
\*\*\* 東京大学大学 新領域創成科学研究科  
# 株式会社先端力学シミュレーション研究所

る一方で、塑性を考慮した計算では接触面圧の分布が大きく異なることを示し、摩耗などの現象解明には弾性すべりと塑性ひずみの考慮が必要であることが述べられている。この他にも有限要素法を用いた研究は少なくないが<sup>5) 6)</sup>、動的な転がりを考慮し、なお接線方向の接触力までを評価の対象とした研究はほとんどない。Zhao らが提案する三次元有限要素モデル<sup>7) 8)</sup>は、高周波数まで解析可能な陽的時間スキームに基づいたもので、動的な摩擦転がり状態におけるコンタクトパッチの形状や応力分布、固着/すべり状態が評価されている。解析結果の比較対象を Hertz 理論および Kalker の CONTACT による計算結果としているため、解析は弾性範囲で行われたものだが、コンタクトパッチにおける法線/接線方向のそれぞれで、Hertz 理論および CONTACT の解析結果と一致することが示されている。その一方で、Zhao らの解析結果には、古典的アプローチでは現れてこなかった高周波な変動が再現されており、より現実的な接触挙動を評価するには、三次元有限要素法による動解析アプローチが有用であることが述べられている。

本稿の目的は、開発した車輪・レール間動的接触解析プログラムの検証のため、解析結果として得られたコンタクトパッチの力学挙動、すなわち車輪・レール間の法線方向接触力、応力分布について、Zhao らが示す結果と比較し、定性的に同様な力学挙動を捉えられているかを確認することである。なお、Zhao らや CONTACT との比較のため、本解析は弾性範囲で実施した。

### 3. 解析手法

車輪・レール間の動的転がり接触挙動を精緻に評価するには、車輪がレール上を転動する状態を再現することが不可欠である。加えて、車輪・レール間の接触力、とりわけ接線方向の接線力(クリープ力)を詳細に再現し、加減速が接触面に与える影響を評価できる必要がある。そこで、三次元大規模並列有限要素解析が可能な構造解析ソフトウェアである FrontISTR<sup>9)</sup>をベースに、上記の再現に係る必要機能を追加拡張することで車輪・レール間の転がり接触を再現および評価するプログラムを開発した。FrontISTR は、線形/非線形静解析、線形/非線形動解析、固有値解析、周波数応答解析、定常/非定常熱伝導解析のような解析機能を有する。本章では、動解析の定式化の概略、開発プログラムにおける計算フロー、FrontISTR のカスタマイズ内容について述べる。

#### 3.1 支配方程式と計算フロー

車輪・レール間の動的転がり接触問題は、大回転・大変位を伴う幾何非線形問題であり、かつ接触を伴う境界非線形問題でもあり、接触領域は動解析に伴って時々

刻々と変化する。これらの非線形性の取り扱いについては FrontISTR で採用されるアルゴリズムに準じている。具体的には、弾塑性および有限変形の取り扱いができるよう、空間の離散化には増分解析手法である Update Lagrange 法を用いている。また、時間積分法には逐次積分法の一つである Newmark-β法を適用し、十分短い時間間隔 Δt に対して運動方程式は増分形で次式のように表される<sup>10)</sup>。

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta\Delta t} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{1-2\beta}{2\beta} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{\gamma-\beta}{\beta} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t \frac{\gamma-2\beta}{2\beta} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (1)$$

ここで、M は質量マトリクス、C は減衰マトリクス、K は剛性マトリクス、u は変位ベクトル、Q と F は内力ベクトル、外力ベクトル、γ, β は Newmark-β法のパラメータである。

また、法線方向の接触状態を求める際には、対になる二物体の表面で定義されるマスター(面)とスレーブ(点)がお互いを貫通しないという拘束条件の下でつり合い点を求めるラグランジュ未定乗数法を適用する。接線方向の接触力の評価にはペナルティ法を適用し、摩擦については Coulomb 摩擦則により考慮する。具体的には、図 1 のような計算フローとなる。

#### 3.2 FrontISTR のカスタマイズ

転がり接触を再現するため FrontISTR に追加した解析機能について簡潔に述べる。詳細についてはすでに前報<sup>11)</sup>で述べたのでそちらを参照されたい。

##### (1) 駆動力による加減速

車軸表面上の複数節点に対して偶力になるように集中荷重を与えることで、トルクを原動力とした車軸の回転を再現する。この集中荷重ベクトルはつねに車軸表面の接線方向となるため、車軸の回転にもなって回転移動する節点上で接線方向を計算し、集中荷重ベクトルの向きが常に車軸の接線方向に沿うように制御する機能を付加した。

##### (2) キャタピラメッシュ

車輪はトルクによって初速ゼロの状態から評価対象の速度域まで加速される。特に高速度域に達するまで車輪を回転させるには、数キロのレールモデルが必要となる。そこで、ある一定の長さのレールモデル(レールブロックと呼ぶ)を複数用意し、長手方向につなげ、車輪が通過した後の最後部レールブロックの節点座標を移動し再び先頭のレールとするということを繰り返す。これによりレールモデルの全体規模を抑えつつ、車輪はレール上を転動し続けることが可能となった。レールがキャタピラのように進行することから、このモデルをキャタピラ

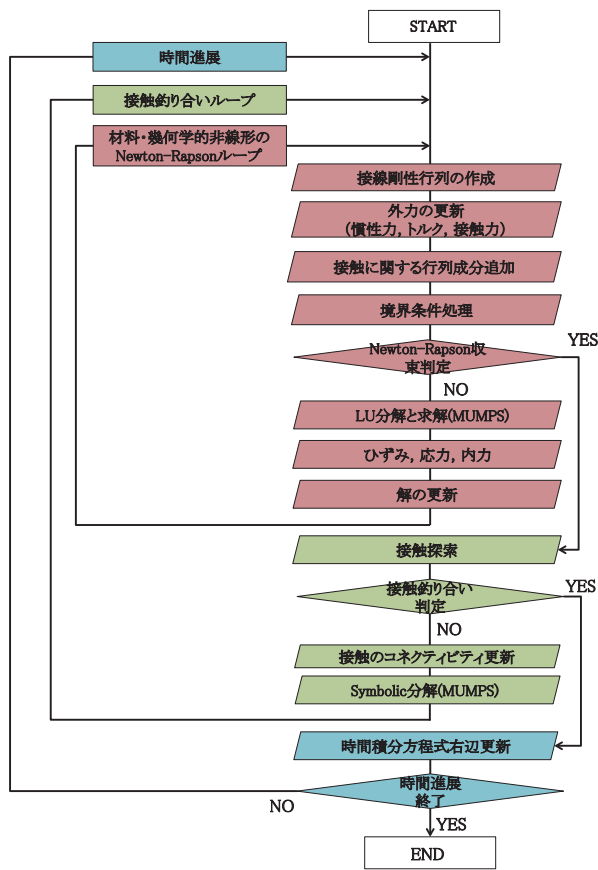


図1 転がり接触解析の計算フロー図

メッシュと呼ぶ。

(3) 無反射境界条件

キャタピラメッシュによる加速により十分高い速度に達した後は、十分な長さで軌道の詳細構造を持つレールモデル上で車輪を転動させ、コンタクトパッチを評価する。ただし、車輪からレールに伝わる衝撃力は数 kHz の高周波な弾性波としてレール内を伝播するため、有限長のレールモデル上では波動がレール端面で反射し、コンタクトパッチの評価に影響を及ぼす可能性がある。そこで、弾性波の反射の影響を低減させるようレールモデルの端部でレーリー減衰を設定することができる。

(4) オンメモリ領域分割機能

本解析プログラムは、大規模モデルを扱う場合には分散メモリ型並列計算機に対応した並列化がなされている。プログラムの並列化は領域分割法に基づいているが、接触計算の場合、接触領域（マスタ面グループとスレーブ点グループ）が複数領域に分散していると、接触ペア（マスター面とスレーブ点のペア）の探索および接触力の計算においてプロセス間の通信が必要となり、計算アルゴリズムの複雑化につながる。そこで、接触領域が同一領域に収まっていることが望ましいが、車輪の回転にともなって接触領域は時々刻々と移動してゆく。ある時点までは同一領域内に収まっていた接触ペアも、そのま

ま転動してゆけば、いずれは接触ペアが異なる領域間で生じることになる。接触ペアの位置を監視し、そうした状況になる前に、計算途中に領域分割を実施する。

(5) MUMPS<sup>12)</sup> の利用（線形方程式の直接解法）

法線方向の接触計算では Lagrange 未定乗数法を適用するが、その定式化からゼロ対角要素を有する線形方程式に帰着する。また接触面での摩擦を考慮するため、係数行列は数値的に非対称となる。線形方程式の解法として、反復法の収束性は行列の条件数に依存するため、接触問題を扱う際に得られる行列においては安定的に収束しないことも予想される。そこで、本プログラムにおいては線形方程式解法に直接法を用いる。直接法には分散並列に対応した直接解法ライブラリ MUMPS を使用している。

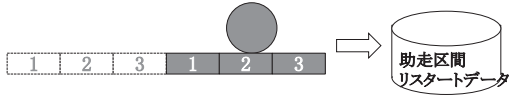
4. 助走区間と評価区間

前章で、キャタピラメッシュなどの工夫により加速段階における計算の効率化を図っていると述べたが、対象速度域までの加速走行を模擬する区間を助走区間と呼ぶ。これに対し、理論解との比較による解析モデル等の検証や現地測定等の実データによる妥当性評価を行う計算は、有限長のレールモデルで行うこととし、評価区間と呼ぶ。評価区間では無反射境界が考慮されるほか、高精度な評価ができるように助走区間より細かいメッシュサイズでモデル化されたレールを用いたり、不整をモデル化したレール上で加速した車輪を走行させたり、レール下により現実的な構造物モデルを組み込んだ軌道モデル上を走行させたりすることができる。このように、本プログラムは計算を助走区間と評価区間の二段階に切り分けており、助走区間で初速ゼロから駆動力による走行状態が再現された車輪を、評価したい軌道モデル上に移して計算を再開させることが可能である。評価区間計算への移行手順のイメージを図2に示す。図中の (1), (2) は助走区間の計算を示しており、3つのレールブロックを再利用しながら車輪が転動していく。(2)の時点で所定の速度に達し、評価区間での計算に移行したいとする。その場合、(2)の時点におけるリスタート計算用データを書き出して助走区間の計算を終了する。つづいて、(3)では、(2)の時点のメッシュデータと追加したい評価区間のメッシュデータを結合して結合メッシュを作成する。最後に(4)にて、(2)で得られたリスタート計算用データに統合メッシュ部分を追加し、データを再構成する。(4)で作成されたリスタート計算用データで計算を再開することで、評価区間が加わった有限要素メッシュで計算が可能となる。

(1) 助走区間の計算



(2) リスタート計算用データの出力



(3) 統合メッシュの作成



(4) 統合メッシュにおけるリスタートデータの再構築

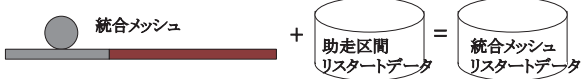


図2 評価区間への移行

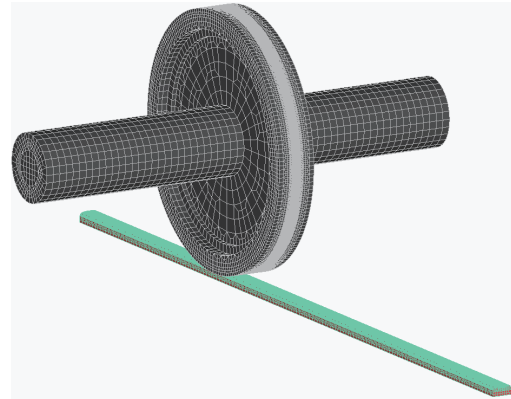


図3 検証用モデルの概略図

5. 助走区間における解析手法の検証

解析手法およびモデルの検証のため、まずは加速走行時において安定した転がり接触状態が再現されているかを確認する。また、その助走区間において得られた法線方向に関する計算結果を Zhao らの結果と比較する。モデル形状や解析パラメータは Zhao らの論文と同様のものを用い、弾性範囲での解析を実施した。形状を図3に示す。レール形状は UIC 規格の 54E1 レールであり、その頭部のみモデル化され、底面は完全固定である。モデルの規模は約 120 万節点 (約 360 万自由度)、110 万要素である。接触面におけるメッシュサイズは車輪、レールともに 1mm 四方となっている。本解析に用いた主なパラメータを表1に示す。

表1の輪重とトルクは、外力として車輪に負荷するが、これらはある一定の時間をかけて徐々に与えてゆく。具体的には、図4の黒線で示すように 0.0s ~ 0.2s にかけて徐々に輪重を載荷する。その後、接触状態の安定を図ってから、同図の赤線で示すように 0.25s から 0.4s にかけて徐々にトルクを与えてゆく。

これらの外力を負荷していった際の車軸の鉛直方向変位と並進速度の時刻歴を図5に示す。輪重の載荷が 100% となる 0.2s 以降、鉛直方向変位は安定し、車輪・レール間の接触が安定して計算できていることがわかる。その後、トルクが負荷され、並進速度が安定的に増加していく様子がわかる。図6は同時刻歴のコンタクトパッチにおける法線方向接触力の合計値の時刻歴波形を示す。静的な輪重に相当する 130kN に収束していく様子がわかる。

続いて、図7は時速 20km 走行時のコンタクトパッチ

表1 解析の主要パラメータ

密度 (kg/mm <sup>3</sup> )	7.81 × 10 <sup>-6</sup>
時間増分 (s)	1.0 × 10 <sup>-4</sup>
摩擦係数	0.3
接線ペナルティ係数	1.0 × 10 <sup>4</sup>
輪重 (kN)	130.0
駆動力相当荷重 (kN)	2.0

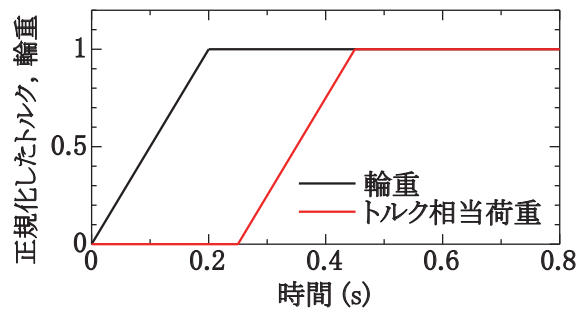


図4 外力 (輪重およびトルク) の与え方

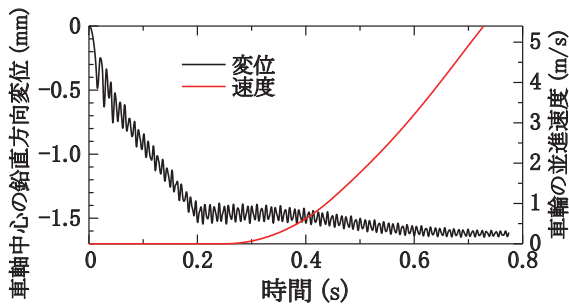


図5 外力（輪重およびトルク）の負荷に対する車輪の鉛直方向変位と並進速度向上の時刻歴

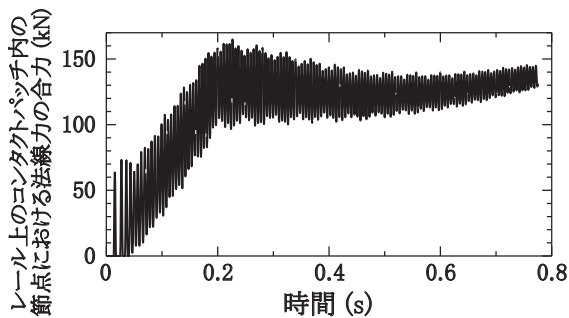


図6 コンタクトパッチ内の法線方向接触力の合計

の鉛直方向垂直応力の分布を示す。また図8は、図7の応力分布を図中の黒い点線上（コンタクトパッチの中心を通るレール縦方向の線上）で切った時の応力分布を示している。また図中には、Zhaoらの計算結果（赤と青）とCONTACTの結果（緑）とを重ねて示している。レール縦方向に対するコンタクトパッチの大きさ、応力分布ともに、著者らの解析結果と概ね一致していることがわかる。

最後に同じく時速20km走行時のコンタクトパッチにおける接線方向接触力分布を図9に示す。矢印がその方向を、色が接線力の大小を表している。図の右側が車輪の進行方向であり、コンタクトパッチの前方側にはほとんど接線力が発生していないのに対し、後方側に大きな接線方向接線力が発生していることがわかる。このように本手法では、接線力の分布が精緻に解析可能であり、こうした解析結果を元に、コンタクトパッチ内の固着/すべりの状態の評価につなげてゆく予定である。また上記で示した結果は速度としては時速20kmと低速域であった。今後は、中速、高速といった異なる速度域でコンタクトパッチを評価し、速度に対するコンタクトパッチの形状、応力分布、固着/すべり状態について調べる予定である。

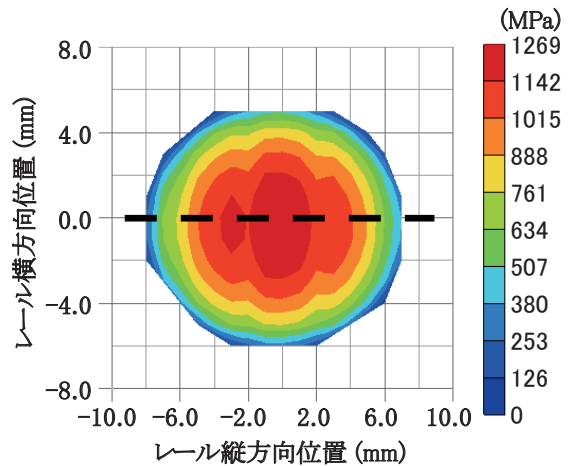


図7 コンタクトパッチの鉛直方向垂直応力（圧縮を正とする）

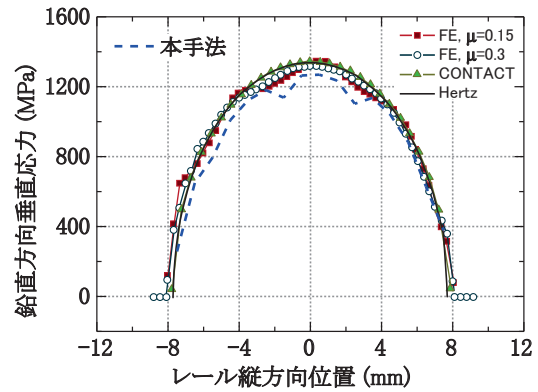


図8 図7の点線上の鉛直方向垂直応力分布

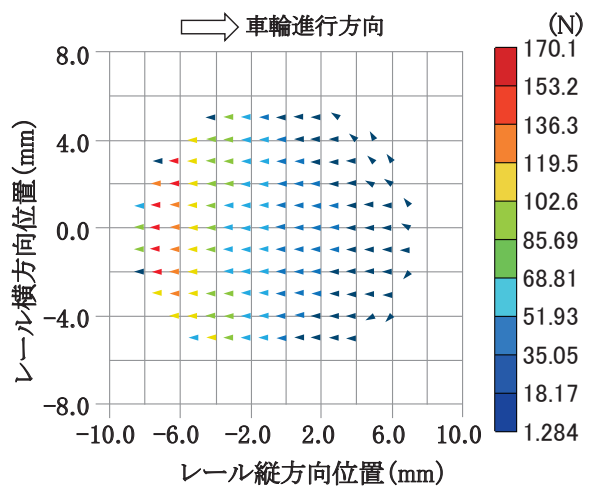


図9 コンタクトパッチ内の接線方向接触力分布

## 6. 評価区間における数値解析モデル

前節では、開発プログラムで得られた解析結果の検証のため、Zhaoらと同形状のモデルを用い、主に法線方向の結果について比較を行った。この計算では、レール底面は完全固定としたが、実際にはレール下の軌道構造が車輪・レール間で発生する接触力に大きく影響している。底面完全固定では、実際の軌道が果たす衝撃力の吸収効果がなく、離散化による数値振動など、実現象とは異なる高周波振動が計算上現れやすい。実軌道の衝撃吸収効果を考慮するため、評価区間ではレール下を連続弾性支持モデル、離散弾性支持モデルとして計算をしていく。そこでは、まず法線方向接触力が、Quasi-staticに近い状態になることを確認する必要がある。軌道からの加振として継ぎ目落ちや正弦波不整を与えたときの接触力の時刻歴変化を調べる。特に正弦波不整を与える解析は、軌道の動的特性（FRF:Frequency Response Function）が得られることから、過去に行われた接触ばねを用いた車輪・レール間の接触計算と実測値との比較による検証などにも適用されてきた<sup>13) 14)</sup>。

また、本手法は有限要素による離散化がベースとなるため、現状では接触部のメッシュサイズは1mmとはいえメッシュ粗さによる非現実な加振が計算結果にノイズとして現れる可能性もある。しかしながら、Contact Patch Filter<sup>15)</sup>の考え方を適用すれば、コンタクトパッチの大きさ（～十数mm）に対しメッシュ粗さ（～1mm）は小さいため、その影響は無視できると考えられ、メッシュ粗さによる解析結果への影響についても検証を進めていく予定である。

## 7. おわりに

本研究で開発した動的転がり接触解析プログラムで得られた解析結果を検証した。まず、輪重とトルクの負荷に対して安定的に接触状態を計算することが可能であり、接触力の法線方向成分の合計値が静的輪重に対して収束していくことが確認できた。また応力分布について、Zhaoらの結果について比較を行い、定性的に同様な力学挙動を捉えられていることを確認した。さらに、コンタクトパッチ内における接触力の接線方向成分から固着／すべり状態が評価可能であることが示された。

今後は、評価区間においてまずは法線方向の検証を進め正弦波不整や継ぎ目を考慮したときの接触力の時刻歴波形について評価し、解析結果の妥当性評価を進める予定である。

## 文献

- 1) Kalker, J., *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- 2) Piotrowski, J. and Kik, W., "A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations," *Vehicle System Dynamics*, Vol. 46, No. 1, pp. 27-48, 2008.
- 3) Baeza, L., Vila, P., Xie, G., and Iwnicki, D., "Prediction of rail corrugation using a rotating flexible wheelset coupled with a flexible track model and a non-Hertzian / non-steady contact model," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, pp. 4493-4507, 2011.
- 4) Wiest, M., Kassa, E., Daves, W., Nielsen, J.C.O., Ossberger, H., Assessment of methods for calculating contact pressure in wheel-rail/switch contact, *Wear* 265, pp.1439-1445, 2008.
- 5) Telliskivi, T., Olofsen, U., Contact mechanics analysis of measured wheel-rail profiles using the finite element method, *Proc. Inst. Mech. Eng. PartF* 215, pp.65-72, 2001.
- 6) Sladkowski, A., Sitarz, M., Analysis of wheel-rail interaction using FE software, *Wear* 258, pp.1217-1223, 2005.
- 7) Zhao, X., Li, Z., Esveld, C., Dollevoet, R., The effect of the tangential traction on wheel-rail dynamic contact, *WSEAS Trans. Appl. Theor. Mech.* Vol.2, pp52-59, 2007.
- 8) Zhao, X., Li, Z., The solution of frictional wheel-rail rolling contact with a 3D transient finite element model: Validation and error analysis, *Wear* 271, pp.444-452, 2011.
- 9) 奥田洋司：大規模アセンブリ構造対応非線形構造解析ソフトウェア, <http://www.ciss.iis.u-tokyo.ac.jp/dl/>
- 10) FrontISTR Ver.4.2 ユーザーズマニュアル, *FrontISTR\_user-manual\_Ver42.pdf*, 2013.
- 11) 坂井宏隆, 高垣昌和, 林雅江, 相川明, 奥田洋司, 殷峻, 大規模並列計算による車輪/レール間の転がり接触挙動の解析, 鉄道総研報告, 第27巻, 第10号, pp.29-34, 2013
- 12) Amestoy, P.R., Duff, I.S., and L'Excellent, J.Y., "Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*,184,pp501-520, 2000.
- 13) Esveld, C., *Modern Railway Track*, ISBN 90-8004-324-3-3, 1989.
- 14) Grassie, S.L., Cox, S.J., 1982. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *J. Mech. Eng. Sci.* 24 (2), 77-90.
- 15) A. Pieringer, W. Kropp, D.J. Thompson, Investigation of the dynamic contact filter effect in vertical wheel/rail interaction using a 2D and a 3D non-Hertzian contact model. *Wear* 271 (2011) pp. 328-338.