

## 固有振動数変化を利用したレール軸力測定方法の基礎検討

相川 明\* 阿部 和久\*\*  
清水 紗希\*\*\* 坂井 宏隆\*

Feasibility Study on a Measuring Method of Rail Axial Stress  
Based on the Resonant Frequency of Standing Wave Modes

Akira AIKAWA Kazuhisa ABE  
Saki SHIMIZU Hirotaka SAKAI

This paper proposes a newly developed method which measures the absolute axial stress of continuous welded rails (CWR) based on the change of resonant frequency of standing wave mode. The motion equations regarding the vibration of a three-dimensional Timoshenko beam under an axial load were derived. By applying the Floquet's theorem to the equations of the unit cell, which is an irreducible sub-structure of the periodicity in the infinite track structure, the equations were led to an eigen-value problem with respect to the frequency domain. We made clear the relation among axial load, wave number and frequency through the dispersion analysis for wave modes propagating in a track, and investigated the applicability of the proposed method to the measurement of the rail axial stress. Furthermore, the paper confirmed the linearity between the axial stress and resonant frequency through the field experiments executed in the actual CWR track aiming the applicability.

キーワード：レール軸力，固有振動数，ロングレール，無限長軌道，インパルス加振試験

## 1. はじめに

鉄道軌道のロングレール化は、振動・騒音の低減、乗り心地の改善に有効であり、多くの路線において導入が進められている。しかし、ロングレール軌道では、その両端部を除いて、レールの伸縮が抑止されるため、温度変化によりレール長手方向に熱応力（以下「軸力」という）が発生する。例えば、夏場の猛暑による圧縮軸力は軌道座屈（レールの張り出し）の原因となり、また冬期の寒冷地での引張軸力は、場合によってはレール破断を誘発しかねない。そのため、ロングレール軌道においては、定められた温度範囲内での敷設と、軸力の長期に亘る管理が不可欠となる。しかし、現状では実用に耐えうる測定法がなく、通常は一定区間毎に設置された杭を基準にして、レール上の目印をもとに、レールの伸縮量を測定し、ふく進による付加軸力を管理するという方法によっている。しかし、この方法では、誤差や主観が介入する余地が多分にあり、また、局所的な軸力値も把握できない。そのため、予防的に実施する設定替え作業の必要性を適切に評価できず、また、夏場の道床作業が全くできないなどの不合理性を解消できない。そのため簡便

な非破壊測定法の開発が望まれている。

レール軸力の測定法に関しては、これまでに様々な方法が考案されている<sup>1)</sup>。例えば、レールのひずみを測定する方法<sup>2)</sup>、音響弾性法<sup>3) 4)</sup>、磁気異方性による測定<sup>5)</sup>等では、無載荷時の初期値が必要であったり、レールの残留応力の影響を受けるなどの課題がある。一方、初期値を必要としない測定法としては、向上法<sup>6) 7)</sup>やレールたわみ法<sup>8)</sup>等が挙げられる。向上法は、レールを吊り上げて反力を測定する方法であるが、測定対象が引張軸力に限られ、軌道座屈の原因となる圧縮軸力は測定できない。また、レールたわみ法はレールに振動を加え、その応答から軸力値を換算する方法であり、軸力の絶対量を求めることができるものの、かなり大掛かりにならざるを得ない。

ところで、レール軸力の増減により、レールの固有振動特性が変化する。弦の振動のように、引っ張られると音が高くなり、圧縮されると音が低くなる性質がある。ただし、レールの場合、細長い弦の振動とは異なり、断面積も大きく、相応の質量もあり、剛性も高い。そのため、軸方向の伸縮のみでなく、曲げ変形、ねじり、せん断、中心軸の偏芯などの影響も受ける。さらに、レールはまくらぎで離散的に締結されており、それら締結の効果についても考慮しなければならない。レールの固有振動特性を応用する方法については、現場実験によりその適用

\* 鉄道力学研究部 軌道力学研究室  
\*\* 新潟大学 工学部建設学科  
\*\*\* 新潟大学大学院（現 軌道技術研究部 軌道構造研究室）

特集：鉄道力学

可能性が示唆されており<sup>9)</sup>、等間隔で支持されるレールの軸力下での振動解析に加えて、室内実験および試験軌道での実験による検討も行われている<sup>10) 11) 12)</sup>。

本研究では、レールの固有振動特性をもとに、初期値を必要とせず軸力を測定する方法に関して、まず、軸力作用下での軌道振動特性に関する基礎方程式を誘導し、3次元の無限長軌道モデルを用いた波動分散解析により、軸力測定に有効な振動モードを抽出した。つぎに、締結間隔の不均一性の影響を解析的に求めて、その補正方法を提案し、さらに、実軌道ロングレール区間での加振実験により、軸力と固有振動数間の線形性を確認した。

2. 軸力を受けるレールの分散特性の解析

2.1 運動方程式と離散化

図1は、離散的に支持される無限長軌道に関する、周期構造の最小単位(1ユニット)である。本研究では、左右レールおよびまくらぎをせん断変形を考慮する Timoshenko 梁でモデル化する。軸力を受けながら振動する梁の運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \psi_z \right) - N \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 (u_y + \theta_x z_0) &= 0 \\ GAK \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \psi_y \right) - N \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \rho A \omega^2 (u_z + \theta_x y_0) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + GAK \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \psi_z \right) + \rho I_y \omega^2 \psi_z &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + GAK \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \psi_y \right) + \rho I_z \omega^2 \psi_y &= 0 \\ GJ \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - \omega^2 \{ \rho (I_y + I_z + z_0^2 A) \theta_x + \rho A z_0 u_y \} &= 0 \\ -EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - \omega^2 \rho A u_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $G$  はせん断弾性係数、 $K$  は断面のせん断係数、 $J$  は St. Venant の捩れ定数、 $A$  は断面積、 $\rho$  は密度、 $E$  はヤング係数、 $I_y, I_z$  は  $y$  軸および  $z$  軸に関する断面二次モーメント、 $N$  は軸力、 $u_x$  は  $x$  軸方向変位、 $u_y, u_z$  は  $y$  軸方向および  $z$  軸方向のたわみ、 $\psi_y, \psi_z$  は断面の回転角、 $\theta_x$

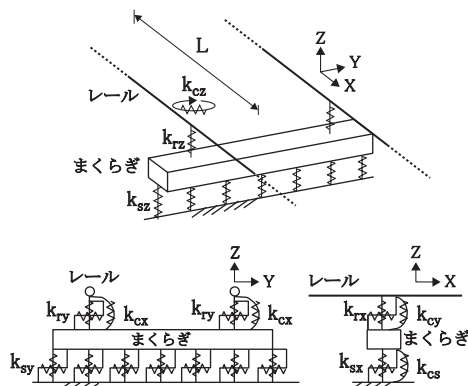


図1 三次元軌道モデル

は捩れ角、 $z_0, y_0$  は断面重心から捩れ中心までの距離(ただし、本問題では  $y_0 = 0$  とする)、 $\omega$  は円振動数である。ここではレールに関して示すが、軸の向きが90度異なることを除くと、まくらぎに関してもほぼ同様の式となる。ただし、まくらぎの場合は  $N=0$  とする。なお、運動方程式の導出過程、および、パラメータの詳細については文献(13)、(14)を参照されたい。

式(1)のそれぞれに関して、仮想変位を重みとし、重み付き残差式による弱定式化を行った。また、たわみ  $u$  を3次 Hermite 多項式、断面回転角  $\psi$  を2次 Lagrange 多項式で補間する TIM7 要素<sup>15)</sup>で、また捩れ角  $\theta_x$  と軸方向変位  $u_x$  を1次補間で近似し、最終的に次の行列式を得た。

$$[\bar{W}]^T [K - NC - \omega^2 M] \{U\} = [\bar{W}]^T \{F\} \quad (2)$$

ここで、 $\{W\}$  は任意の仮想節点変位ベクトル、 $\{\bar{W}\}$  はその共役ベクトル、 $[\bar{W}]^T$  は  $\{\bar{W}\}$  の転置行列、 $[K]$  は剛性行列、 $N$  は軸力、 $[C]$  は粘性行列、 $[M]$  は質量行列、 $\{U\}$  は節点変位ベクトル、 $\{F\}$  は節点力ベクトルである。Floquet 原理<sup>16)</sup>によると、無限周期構造における定常応答解は「周期構造物1ユニットの左右両端において、定常解の位相が周期的にずれる」という第2種周期性をもつ。これを式で表すと、次式の通りである。

$$U_L = U_0 e^{-i\kappa L}, F_L = -F_0 e^{-i\kappa L}, \bar{W}_L = \bar{W}_0 e^{i\kappa L} \quad (3)$$

ここで、 $L$  は周期長(締結間隔)、 $U_0, U_L, F_0, F_L$  はそれぞれ当該周期構造を与える1ユニット(図1)の手前と後方レール端における節点変位ベクトル、節点力ベクトル、 $\bar{W}_0, \bar{W}_L$  は1ユニットのレール端の仮想節点変位ベクトルの共役、 $\kappa$  は Floquet 波数と呼ばれ、通常の波数に相当するパラメータである。

式(3)を式(2)に適用し、 $U_L, \bar{W}_L$  を消去すると、自由振動場に対して次式を得る。

$$[K' - NC' - \omega^2 M'] \{U\} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $(')$  は式(3)の条件を課して行列を縮約したため、もとの行列とは一致しないことを表している。式(2)の行列  $[K], [C], [M]$  は実対称行列なので、式(4)の係数行列は Hermite 行列となる。この固有値問題を解くことで、円振動数  $\omega$  と Floquet 波数  $\kappa$  および軸力  $N$  との関係(分散曲面)を求めることができる。

2.2 無限長軌道モデルによる分散解析結果

解析で用いるパラスト軌道のモデルとしては、50kgN レール(締結間隔60cm)および3号PCまくらぎを想定し、また、レールの離散化では1ユニットを10要素、まくらぎは16要素で一様分割した。分散曲面、すなわち、周波数  $f (= \omega/2\pi)$  と Floquet 波数  $\kappa$  および軸力  $N$  との関係は三次元空間中の曲面として与えられる。そこで、軸力  $N$  (圧縮軸力を正) を0から6MNまで2MN毎に、また、無次元化した Floquet 波数  $\kappa L$  を0から  $\pi$  まで変化させて、式(4)の固有値問題を円振動数  $\omega$  について解

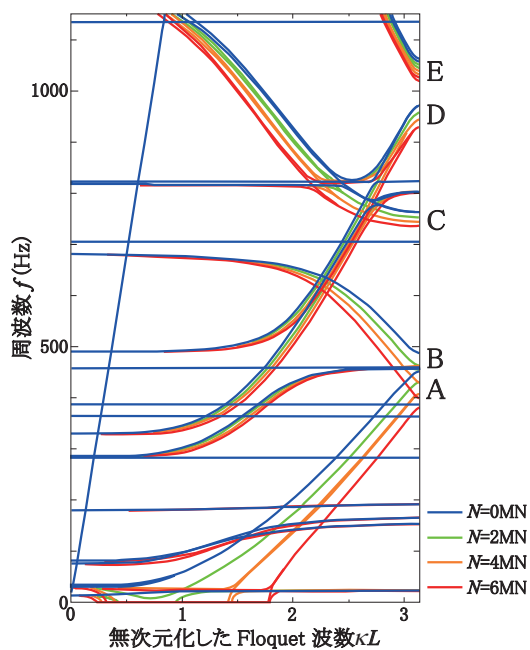


図2 周波数  $f$ , Floquet 波数  $\kappa$ , 軸力  $N$  の関係

き、その結果より分散曲面を求めた。なお、ばね値については文献 17, 18 を参照した。

周波数  $f$  と無次元化した Floquet 波数  $\kappa L$  および軸力  $N$  との関係を図 2 に示す。図中、水平線となる分散曲線は、Floquet 波数  $\kappa$  や軸力  $N$  の影響を受けないモードであり、主にまくらぎが振動するモードである。図中、 $\kappa L = \pi$  における分散曲線の傾きが 0 となるモードの内、軸力の影響が認められるものを A, B, C, D, E で分類する。これらは、等間隔支持無限長レールの定在波モードに対応する。

### 2.3 軸力測定に有効な振動モード

各振動モードに関して、最大振幅発生時における変形の特徴を図 3 に示す。図中、曲線はレールを、長方形ブロックはまくらぎを表す。また、A, B, C は水平方向の振動モードを上から見たものであり、D, E は鉛直方向の振動モードを横から見た図である。図より、A, C, D はともに波長  $2L$  で、まくらぎ位置を節として振動す

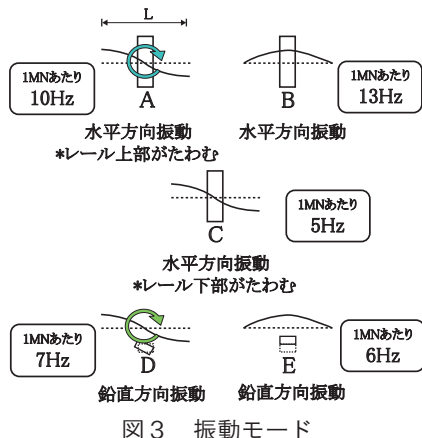


図3 振動モード

るモードであり、とくに D は、いわゆる pinned-pinned resonance と呼ばれるレール定在波に相当する振動モードである。また、A は、レール断面の上部が水平方向に大きくたわむ振れ変形モード、一方 C は、逆に下部が水平方向に大きくたわむ振れ変形モードである。また、B のモードは、まくらぎ位置を腹として水平にたわむ振動モードであり、一方、E のモードはまくらぎ位置を腹として鉛直にたわむモードである。いずれの振動モードでも、軸力 0MN の近傍で、軸力と固有振動数とは線形関係にあった。同図中に、軸力 0MN の近傍で軸力に対する周波数の感度を示すが、A ~ E の振動モードに関して、それぞれ軸力変動 1MN あたり、10Hz, 13Hz, 5Hz, 7Hz, 6Hz の固有振動数の変動があった。

鉛直と水平たわみ振動のうち、水平方向振動モード (B)、および、鉛直方向振動モード (E) は、まくらぎ位置を腹として振動するモードであり、まくらぎに関する各種物性値の影響を直接的に受けるので、軸力測定には適しない。一方、水平方向振動モード (A)、水平方向振動モード (C)、および、鉛直方向振動モード (D) は、まくらぎ位置を節とする振動モードであり、レールがまくらぎと独立して振動するため各種物性値のばらつきの影響を受けにくいことから、軸力測定に適していると考えられる。ことに、水平方向振動モード (A)、および、鉛直方向振動モード (D) は、軸力に対する固有振動数の感度も高く、軸力測定に最適であると考えられる。

レール軸力の測定では約 0.1MN 刻みでの測定が要求される。これを固有振動数の変動量に換算すると、A のモードで 1Hz、D のモードで 0.7Hz となる。固有振動数の測定精度は測定方法によるが、最も簡単なインパルス加振による方法では、その分解能は 0.1 ~ 0.2Hz であり、レール軸力の測定に必要な分解能は十分に実現可能と考えられる。

## 3. 締結間隔のばらつきに関する補正方法

### 3.1 締結間隔に関する分布関数の導入

図 4 のように、実際の軌道は締結間隔にばらつきを有する。本章では、締結間隔  $L$  の代わりに、締結間隔が均一な軌道からの、支持点のずれ量  $\varepsilon$  によりばらつきを評価する。締結間隔の平均値を  $L_0$ 、隣接する支持点のずれをそれぞれ  $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$  とするとき、締結間隔  $L_i$  は次式となる。

$$L_i = L_0 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \quad (5)$$

ここでは、支持点のずれ  $\varepsilon$  に関する確率密度関数として、

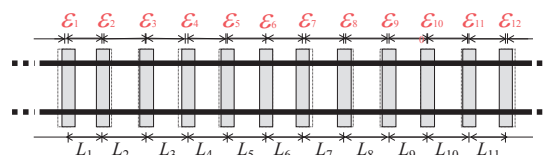


図4 締結間隔にばらつきのある軌道

特集：鉄道力学

平均 0、分散  $\sigma_\varepsilon^2$  の正規分布を仮定する。なお、式 (5) の関係より、支持点のずれ  $\varepsilon$  の分散  $\sigma_\varepsilon^2$  は、締結間隔の分散  $\sigma^2$  の半分となる。

3.2 支持点の 1 箇所のずれに関する影響性解析

締結間隔が均一な有限長モデルにおいて、その中央の支持点 1 箇所だけにずれ  $\varepsilon$  を与え、そこにインパルス加振に相当する調和加振  $F e^{i\omega t}$  を加え、加振点応答を調べた。モデルの長さは、無限長レールとほぼ同じ振動特性が得られるように精度を確認し、216m (360 ユニット) とした。本モデルの場合、無限長レールとの固有振動数に関する差は 0.015 Hz である。その他の解析条件は前述の解析と同じとした。

締結間隔が均一な場合と、加振点の支持点を 1 箇所ずらした場合 ( $\varepsilon = 0.03\text{m}$ ) の両者について、鉛直加振時の加振点応答を図 5 に示す。図より、締結間隔が均一な場合は、固有振動数において鋭いピーク形状を示すことがわかる。一方、支持点にずれを与えると、振幅が 1 桁小さくなり、山の形状もなだらかになり、固有振動数も、締結間隔が均一な場合より 0.8Hz ほど低くなった。

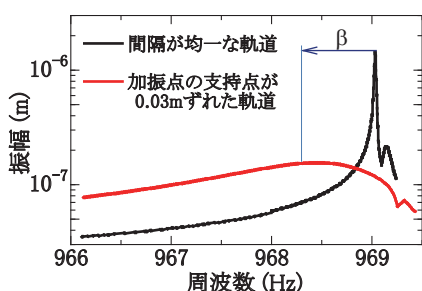


図 5 加振点応答 (振動モード D)

ここで、締結間隔が不均一な場合の固有振動数の低下量を  $\beta$  とする。 $\beta$  は  $\varepsilon$  の大きさにより変化するので、 $\varepsilon$  の関数となる。そこで、加振点から  $n$  離れた支持点 1 点にずれ  $\varepsilon$  を与えて、固有振動数の低下量  $\beta$  を解析的に調べた。 $\varepsilon$  を与える位置は  $n=10, 20, 40$  の 3 通りである (距離に換算すると、それぞれ 6m, 12m, 24m である)。D の振動モードに関する解析結果を図 6 に示す。図より、ずれ  $|\varepsilon|$  が大きくなるにつれて、固有振動数の低下量  $|\beta|$  も大きくなり、その関係は放物線に近い上向きに凸の曲線になった。また  $n$  を変化させても、 $\varepsilon$  と  $\beta$  は同じ曲線上

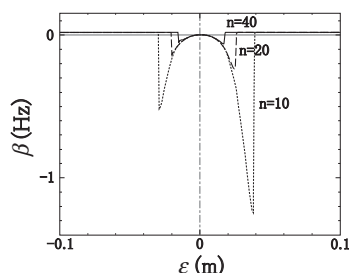


図 6  $\varepsilon - \beta$  の関係 (振動モード D)

にある。また、 $|\varepsilon|$  がある限界値を超えると  $\beta$  は急激に変化し、ほぼ 0 でわずかにプラス側に戻ることがわかった。

3.3 多点の支持点のずれに関する二次形式近似

つぎに、すべての支持点についてずれが存在する場合、その補正方法として平均値を用いる方法を考える。図 4 のように、 $n$  個の支持点それぞれについて、ずれ  $\varepsilon_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) が存在するものとする。このとき、加振点における固有振動数のずれ  $\beta$  を、まくらぎ支持点のずれ  $\varepsilon$  の二次形式により、次式のように近似する。

$$\beta(\varepsilon) = \sum_i \sum_j A_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (6)$$

ここに、2 つの確率変数  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$  は独立とし、その確率密度関数を  $f_\varepsilon(\varepsilon)$  で与える。 $A_{ij}$  は定数である。なお、 $n$  は支持点総数であり、これは解析に用いるユニット数に一致する。このとき、 $\beta$  の期待値  $E[\beta]$  は次式のように表される。

$$E[\beta] = \iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sum_j A_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j f_\varepsilon(\varepsilon_i) f_\varepsilon(\varepsilon_j) d\varepsilon_i d\varepsilon_j \quad (7)$$

$\varepsilon$  は期待値  $E[\varepsilon]=0$  であり、式 (7) は結局次式のようにになる。

$$E[\beta] = \sum_i A_{ii} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i^2 f_\varepsilon(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = \sigma_\varepsilon^2 \sum_i A_{ii} \quad (8)$$

ここで、 $\sigma_\varepsilon^2$  はまくらぎ支持点のずれ  $\varepsilon$  の分散である。つまり、固有振動数のずれ  $\beta$  の期待値  $E[\beta]$  は、まくらぎ支持点のずれ  $\varepsilon$  の分散  $\sigma_\varepsilon^2$  に比例するものと考えられる。

3.4 固有振動数のずれに関する期待値分布

式 (8) の関係を確認するため、ある支持点のずれのばらつき (分散  $\sigma_\varepsilon^2$ ) をもつ軌道を対象に数値実験を行う。そのときの加振点の固有振動数のずれ  $\beta$  の期待値  $E[\beta]$  を求める。解析に用いる軌道の長さは 216m (360 ユニット、360 支持点) とし、すべての支持点のずれ  $\varepsilon$  を期待値 0、分散  $\sigma_\varepsilon^2$  の正規乱数により与える。軌道中央を加振し、加振点における固有振動数を調べた。 $\varepsilon$  の分散として、 $\sigma_\varepsilon^2 = 0.00005 \sim 0.0007$  ( $\text{m}^2$ ) の 6 通りを想定し、また、ひとつの分散  $\sigma_\varepsilon^2$  に対して異なるパターンの 1000 種類の軌道を生成し、それぞれの軌道に関して固有振動数を求め、それらの解析結果から  $E[\beta]$  を算出した。

水平方向に加振した A の振動モード、および、鉛直方向に加振した D の振動モードに関する期待値  $E[\beta]$  を

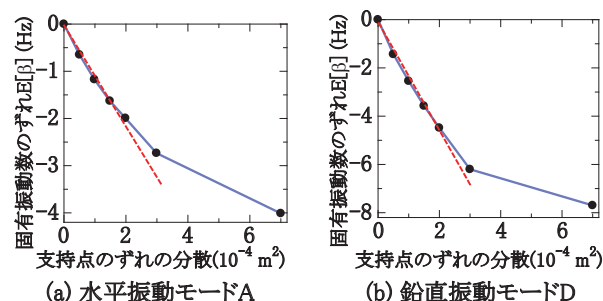


図 7 固有振動数のずれ量の期待値 (解析)

図7に示す。図中の破線は $\sigma_e^2 \leq 0.0002 \text{ (m}^2\text{)}$ までの結果から引いた線形近似線である。図より、 $E[\beta]$ は概ね $\sigma_e^2$ に比例することがわかる。また、 $\sigma_e^2$ が大きくなるにつれて、比例関係から外れるものの、 $\sigma_e^2 \leq 0.0002 \text{ (m}^2\text{)}$ であれば式(8)の関係が成立することがわかる。

すなわち、締結間隔にばらつきがある軌道においても、現場においてあらかじめ締結間隔を測定し、支持点のずれの分散 $\sigma_e^2$ を得ることにより、固有振動数のずれ $\beta$ の期待値 $E[\beta]$ が求められ、本法が適用できることが確認できた。

#### 4. 実軌道におけるインパルス加振実験

##### 4.1 実験概要

実軌道のロングレール区間においてレールの加振実験を行った。実験箇所は直結軌道のロングレール区間であり、計測地点の前後100m以上にわたり継目のない直線区間である。当該箇所、日照によるレール軸力変動を外力とし、30分～1時間毎にレールをインパルスハンマで加振することによって、その時のレールの固有振動数を求め、同時に接触型温度計によるレール表面温度測定、およびひずみゲージによるレール軸力の測定を実施することにより、レールの固有振動数の変化とレール軸力の変化との関係を調べた。

図8に加振実験の概要を示す。加振箇所は、隣接するまくらぎの間点であり、ここにインパルスハンマで鉛直方向(Z方向)および水平方向(Y方向)より打撃を加える。加振箇所でのレールの応答波形を測定するために、加振地点のレール頭側部、および底部に三軸加速度センサを取り付けた。なお、インパルスハンマによる加振は、1試番毎に10回以上行い、加振波形が良好な試番のみを分析に用いた。分析においては、ハンマの加振波形の特性の違いの影響をなくすために、加速度データをイナータンス(加速度/加振力)に変換した。

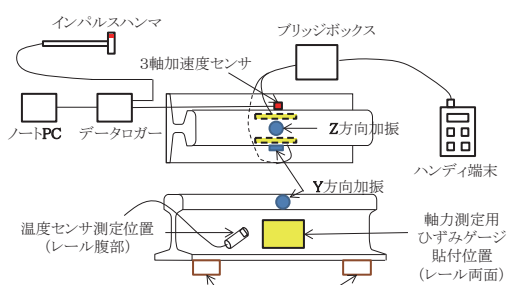


図8 ロングレール加振実験の概要

##### 4.2 実験結果

図9に、レール軸力とレール温度の経時変化を示す。図中、レール軸力については、測定開始時点基準とし、圧縮方向への増加を正、減少を負として表示する。図よ

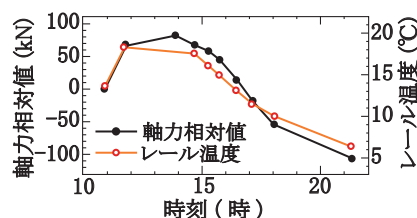


図9 軸力相対値およびレール温度(実軌道)

り、昼間の日照の影響によりレール軸力に変動が発生していることが分かる。本測定を行った間に、レール温度の変化は11.3°Cで、レール軸力には177kNの変動があった。

水平方向と鉛直方向に関するインパルス加振実験の測定例を図10に示す。図より、水平加振では340Hz近傍に、また、鉛直加振では730Hz近傍に、固有振動数のピークがある。これらは、まくらぎ位置を節、レール中間部を腹として、レールが水平方向および鉛直方向に振動する定在波の振動モードであり、前者が水平方向振動モード(A)、後者が鉛直方向振動モード(D)に相当する。両図のピークの形状を比べると、水平方向振動モードのほうが鋭く尖った形状であり、固有振動数をより正確に特定でき、したがって測定に有利であることがわかった。

図11はレール軸力と固有振動数の関係である。本実験では177kNのレール軸力変動で、水平方向で3.66Hz、鉛直方向で6.56Hzの固有振動数の変動があった。固有振動数の変動幅は鉛直方向の方が水平方向より1.8倍ほど大きく、これはおよそ固有振動数の大きさに比例している。図中の直線は測定値に近似式を当てはめたものである。図より、鉛直方向および水平方向のいずれの場合も、レール軸力変化量と固有振動数変化量には明瞭な線形性があり、どちらも非常に高い相関性(相関係数0.97

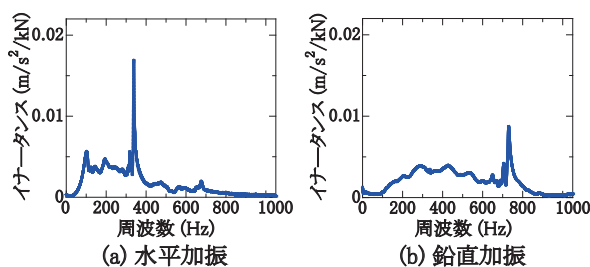


図10 加振実験測定例(実軌道)

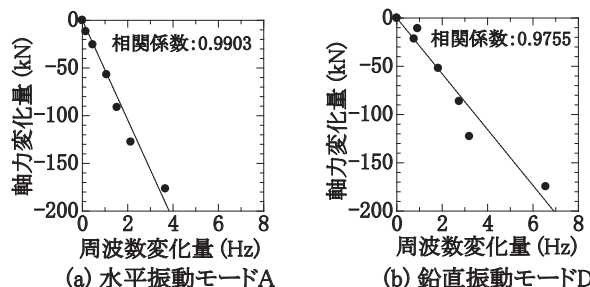


図11 軸力と固有振動数(実軌道)

以上)があることがわかる。また、水平方向振動モード(A)のほうが相関係数が大きく、測定値のばらつきが少ないことから、水平方向振動モード(A)のほうが測定に有利と判断できる。

## 5. まとめ

本論文では、軌道振動特性に基づくレール軸力の測定方法に関する基礎理論を構築し、その適用可能性を数値解析と現場実験により検証した。本論文で得られた知見をまとめると以下の通りである。

- (1) 数値解析の結果より、締結箇所を節とするレールの鉛直方向および水平方向の定在波の振動モードが、締結装置、まくらぎ下面のばね定数、および、まくらぎの振動モードの影響を受けず、レール軸力測定に有効であることが分かった。
- (2) レール軸力変動に対するレールの固有振動数変化の感度分析を行った。その結果、レールの水平方向の振動モードでは10Hz/MN、鉛直方向の振動モードでは7Hz/MNの感度があった。例えば0.1MN単位のレール軸力管理では、十分に実現可能な分解能である。
- (3) 締結間隔変動の影響を調べた。締結位置のずれ $\varepsilon$ の分散が $\sigma_\varepsilon^2 \leq 0.0002$  (m<sup>2</sup>)のとき、固有振動数のずれ $\beta$ の期待値 $E[\beta]$ は $\sigma_\varepsilon^2$ に比例する。すなわち、締結間隔にばらつきがある軌道においても $\sigma_\varepsilon^2$ を別途得ることにより、本法が適用できる。
- (4) 実軌道ロングレール区間において、レール軸力載荷時の固有振動数の変動を実験的に調べた。実験結果より、レール軸力の変化量とレールの固有振動数の変化量の間には明瞭な線形関係があることを確認した。

## 文 献

- 1) Towpik, K., "Variability of stress and longitudinal force distributed in continuous welded rail tracks," *Archives of Civil Engineering*, Vol.52(4), pp.701-709, 2006.
- 2) Yoon, H-J., Song, K-Y., Kim, J-S. and Kim, D-S., "Longitudinal strain monitoring of rail using a distributed fiber sensor based on Brillouin optical correlation domain analysis," *NDT & E International*, Vol. 44(7), pp.637-644, 2011.
- 3) 戸田裕己, 鶴丸英幸: 音弾性によるロングレールの軸応力測定, 一第1報 V 反射縦波の音弾性特性一, 非破壊検査, Vol.57, No.5, pp.246-252, 2008
- 4) 戸田裕己, 小玉尊守, 村田頼信: 音弾性によるロングレールの軸応力測定, 一第2報 改良形装置による新敷設レールの軸応力の経月変化測定一, 非破壊検査, Vol.57, No.9, pp.441-447, 2008
- 5) 柏谷賢治, 坂本博: 磁気異方性センサを用いた応力測定における出力対応力の線形化法, 非破壊検査, Vol.53, No.2, pp.93-97, 2004
- 6) Sato, Y., "Study on measurement of rail longitudinal force on slab track by rail lifting," *8th International Conference on Computers in Railways*, pp.571-580, 2002.
- 7) Vortok International, "VERSE, Non-destructive stress-free temperature measuring system," 2007.
- 8) Damljanović, V. and Weaver, R. L., "Laser vibrometry technique for measurement of contained stress in railroad rail," *J. Sound and Vibration*, Vol. 282 (1-2), pp.341-366, 2005.
- 9) 大宮孝夫, 水上英也, 小野敏, 渡邊勇, 加藤満: ロングレール内軸力に関する基礎的研究, 土木学会第60回年次学術講演会, IV-134, pp.267-268, 2005
- 10) Kukla, S., "Free vibrations of axially loaded beams with concentrated masses and intermediate elastic supports," *J. Sound and Vibration*, Vol.172(4), pp.449-458, 1994.
- 11) Kjell, G. and Johnson, E., "Measuring axial forces in rail by forced vibrations: experiences from a full-scale laboratory experiment," *Proc. Inst. Mech. Eng. F, J. Rail and Rapid Transit*, Vol. 223(3), pp.241-254, 2009.
- 12) Luo, Y., Li, L. and Yin, H., "A dynamic analysis of a continuous welded rail track under a longitudinal stress caused by temperature changes," *Proc. Inst. Mech. Eng. F, J. Rail and Rapid Transit*, Vol.224(2), pp.91-101, 2010.
- 13) 清水紗希, 阿部和久, 相川明, 紅露一寛: 3次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析, 鉄道力学論文集, Vol.14, pp.75-82, 2010
- 14) Abe, K., Shimizu, S., Aikawa, A. and Koro, K., "Theoretical study on a measuring method of rail axial stress via vibration modes of periodic track," *WCRR, 2011*.
- 15) Koro, K., Abe, K., Ishida, M. and Suzuki, T., "Timoshenko beam finite element for vehicle-track vibration analysis and its application to jointed railway track," *Proc. Inst. Mech. Eng. F, J. Rail and Rapid Transit*, Vol. 218(2), pp.159-172, 2004.
- 16) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K., "Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: Antiplane strain," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 45(2), pp.343-349, 1978.
- 17) 鶴秀生, 山中高章, 瀧川光伸: 鉄道レール振動の数値解析, 一時間領域差分法を用いた振動数値解析の紹介一, 日東紡音響エンジニアリング株式会社, NOE 技術ニュース, No.21, 2004
- 18) 石田周二, 古田勝: 曲線軌道における台車・軌道系振動の解析, 機械学会論文集C編, Vol.63(615), pp.3809-3816, 1997