

# 有限要素法に基づく架線・パンタグラフ系の 3次元運動シミュレーション

池田 充\*

Three Dimensional Dynamic Simulation of Pantograph-Catenary System  
Based on Finite Element Method

Mitsuru IKEDA

In order to analyze dynamic behavior of pantograph/catenary system, the numerical simulation program based on the finite difference method (FDM) has been being used for researches, developments, and operations of electric railways for a long time. However, the finite element method (FEM) is more suitable for dynamic analysis subjected to geometrical nonlinearity associated with three-dimensional structure of catenary. Hence, the author has newly developed a new simulation program based on FEM, which can analyze dynamic behavior of pantograph/catenary system with three-dimensional configuration.

キーワード：架線，パンタグラフ，有限要素法，シミュレーション，幾何学的非線形

## 1. はじめに

架線・パンタグラフ系の動的挙動予測は、電車線設備やパンタグラフの設計、開発を行う上で非常に重要である。しかしながら、架線は複数の線条と多数の金具から構成され、しかもレール方向に対して長大な構造を持つことから、その動的挙動は複雑であり、これを理論的に求めることには限界がある<sup>1) 2)</sup>。そこで、1960年代後半に東京大学の藤井、江原らにより差分法に基づく架線・パンタグラフ系の運動シミュレーション手法<sup>3)</sup>が開発され、その後様々な改良が加えられながら今日に至っている。最近では、この手法により地震時における電車線の3次元挙動予測なども可能となっている<sup>4)</sup>。ただし、架線を構成する各線条には高い張力が与えられているため、一般には曲線引金具等に作用する横張力は架線・パンタグラフ間の平均接触力よりも大きい。そのため、架線の3次元構造を運動シミュレーションに正確に反映させるためには、曲線引金具等の回転運動に伴う幾何学的非線形性を考慮する必要があると考えられるが、このような非線形効果を差分法で表現することは簡単ではない。

そこで筆者らは、架線の3次元動的な運動を取り扱う上では有限要素法をベースとした解法に多くの利点があると考え、有限要素法に基づく架線・パンタグラフ系の3次元運動シミュレーション手法を新たに開発した。従来

のシミュレーション手法との最大の相違点は、ハンガや曲線引金具など、大きな回転変位を伴って運動する部材に対し、その幾何学的非線形性を考慮した上で解を求めていることである。

## 2. 基礎方程式

### 2.1 線条の基礎方程式と離散化

架線形式には種々の方式のものがあるが、ここではその代表例であるシンプルカテナリ架線を取り扱う。ただし、他の架線形式でも基本的な取り扱いは同一である。

線条（トロリ線とちょう架線）の運動を表す基礎方程式として、張力が作用したEulerはりの波動方程式を適用する。Eulerはりには各断面の平面性が常に保持されることを仮定したモデルであり、せん断変形の影響を無視したものである。静的な片持ちはりの場合、はりの長さがはりの厚さの10倍以上あれば、せん断変形は曲げ変形の1%以下に過ぎない。架線の各線条は、ちょう架間隔に対する線条の径の比は非常に小さいため、静構造解析においてせん断変形の影響を無視しても差し支えない。また、動解析においても、波動の波長が線条の径に比べて十分大きければ、せん断力の影響は無視しても問題ない。例えば、断面積110mm<sup>2</sup>、張力9.8kNのトロリ線の場合、100Hzの波動でもその波長は約1.2mであり、線条の径の約100倍のスケールである。

なお、各線条のレール方向(x軸方向)変位は、鉛直方向(y軸方向)およびまくらぎ方向(z軸方向)の変

\* 鉄道力学研究部 集電力学研究室

特集：鉄道力学

位に比べて十分小さいと見なすことができる。そこで、各線の  $x$  軸方向変位は無視できるものと考え、以下の方程式を適用する。なお、座標系の定義は図 1 (a) に示す通りである。

$$\begin{aligned} \rho \ddot{q}_y(x,t) + EI_y q_y''''(x,t) - T q_y''(x,t) &= f_y(x,t) \\ \rho \ddot{q}_z(x,t) + EI_z q_z''''(x,t) - T q_z''(x,t) &= f_z(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $q_y(x,t)$ ,  $q_z(x,t)$  は線の  $y$  軸方向および  $z$  軸方向の変位、 $\rho$  は線の線密度、 $E$  は線のヤング率、 $I_y$ ,  $I_z$  は線の  $y$  軸および  $z$  軸まわりの断面 2 次モーメント、 $T$  は線の張力、 $f_y(x,t)$ ,  $f_z(x,t)$  は位置  $x$  に作用する  $y$  軸方向および  $z$  軸方向外力である。また、添え字 ( ' ) は空間微分を、添え字 ( ' ) は時間微分を、それぞれ表す。

式 (1) を有限要素法により離散化する。任意点の変位は、有限要素モデルの節点変位と形状関数により表現する (図 1 (b))。一方、系に作用する全ての外力は等価な節点外力に置き換える。たとえば、節点  $i$  と節点  $i+1$  により定義されるはり要素上の任意の座標  $x$  における変位  $q_y(x)$ ,  $q_z(x)$ 、およびたわみ角  $\phi_y(x)$ ,  $\phi_z(x)$  は、節点の変位およびたわみ角により次式で表される。

$$\begin{bmatrix} q_y(x) \\ q_z(x) \\ \phi_y(x) \\ \phi_z(x) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_i(\bar{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし

$$\mathbf{q}_i = [q_{y,i} \ q_{z,i} \ \phi_{y,i} \ \phi_{z,i}]^T$$

ここで  $\mathbf{Q}_i(x)$  ははり要素の形状関数行列であり、 $\bar{x}$  は座標  $x$  を各はり要素の局所座標により表していることを示している。

以上の離散化操作を行った後、仮想仕事の原理を適用すれば、式 (1) の偏微分方程式を以下の常微分方程式に変換できる。

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{K}_c \mathbf{q}_c = \mathbf{F}_c \quad (3)$$

ただし

$$\mathbf{q}_c = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \dots \ \mathbf{q}_n^T]^T$$

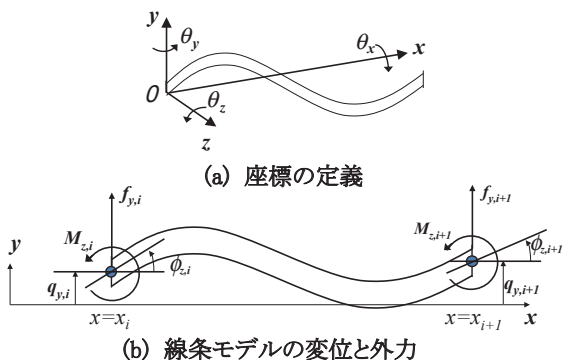


図 1 線条モデルに関する記号の定義

$$\mathbf{F}_c = [\mathbf{F}_1^T \ \mathbf{F}_2^T \ \dots \ \mathbf{F}_n^T]^T$$

$$\mathbf{F}_i = [f_{y,i} \ f_{z,i} \ M_{y,i} \ M_{z,i}]^T$$

であり、 $n$  は線の総節点数を表す。また、 $\mathbf{M}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$ ,  $\mathbf{K}_c$  はそれぞれ各線の整合質量行列、減衰行列、剛性行列である。このうち剛性行列は、曲げ剛性に起因する剛性を表す行列と、張力に起因する剛性 (形状剛性) を表す行列とからなる。また、減衰については比例減衰モデルを適用する。

## 2.2 ハンガ等の取り扱い

架線を構成する複数の線条 (トロリ線とちょう架線) は、ハンガならびに曲線引金具により拘束されている。通常、これら金具類には強い曲げモーメントが作用しない構造となっていることから、ハンガ、ならびに曲線引金具については棒要素としてモデル化する。ただし、トロリ線とちょう架線がともに  $y$  軸方向と  $z$  軸方向の自由度を有する場合、ハンガおよび曲線引金具には  $yz$  平面内において無視できない程度の回転運動を生じる可能性がある。この運動を正しく表現するためには、剛体的な回転運動の影響 (幾何学的非線形性) を考慮する必要がある。

ここでは、 $j$  番目の棒要素が剛体的な回転運動を伴う運動をする場合を考える。この要素両端の節点に作用する復元力  $\mathbf{F}_{\text{int},j}$  は節点変位ベクトル  $\mathbf{q}_j$  に対して非線形となる。そこで、あるつり合い条件からの増分 ( $\Delta \mathbf{q}_j$ ) に関して両者の関係が線形近似できるものと仮定し、以下のように記述するものとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{int},j}(\mathbf{q}_j + \Delta \mathbf{q}_j) &= \mathbf{F}_{\text{int},j}(\mathbf{q}_j) + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},j}(\mathbf{q}_j)}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \Delta \mathbf{q}_j \\ &= \mathbf{F}_{\text{int},j}(\mathbf{q}_j) + \mathbf{K}_{r,j} \Delta \mathbf{q}_j \end{aligned} \quad (4)$$

上式において、 $\mathbf{K}_{r,j} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},j}(\mathbf{q}_j)}{\partial \mathbf{q}_j}$  は接線剛性行列と呼ばれる。接線剛性行列は、弾性剛性行列  $\mathbf{K}_0$  と幾何剛性行列  $\mathbf{K}_G$  により次式のように書くことができる。ただし、前者は微小変位理論から導かれる剛性行列、後者は初期応力とひずみテンソルの非線形性に起因する剛性行列である。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},j}(\mathbf{q}_j)}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \Delta \mathbf{q}_j \equiv \mathbf{K}_{r,j} \cdot \Delta \mathbf{q}_j = (\mathbf{K}_{0,j} + \mathbf{K}_{G,j}) \Delta \mathbf{q}_j \quad (5)$$

なお、剛体的な回転運動を考慮に入れる場合、通常は質量行列は一定ではない。しかし、棒要素では  $y$  軸方向と  $z$  軸方向の慣性力が連成しないため、質量行列は常に一定としてよい。

## 2.3 パンタグラフの運動方程式

架線・パンタグラフ系の動的挙動を詳細に求めるためには、パンタグラフのモデルに関しても、従来から使用されているばね・質点モデル (図 2) をさらに発展させ

る必要がある。しかしながら、ここでは架線モデルの改良を優先させ、パンタグラフについては従来モデルをそのまま適用する<sup>3)</sup>。2元系パンタグラフモデルの場合、その運動は次式で表現される。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{y,p1} \\ \ddot{q}_{y,p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{y,p1} \\ \dot{q}_{y,p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{py1} \\ q_{py2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{y,pc} \\ F_{y,p0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、 $m_1$ 、 $m_2$ はそれぞれ舟体と枠組の等価質量、 $k_1$ 、 $k_2$ はそれぞれ復元ばねと主ばねの等価ばね定数、 $c_1$ 、 $c_2$ はそれぞれ復元ばねとパンタグラフダンパの減衰係数、 $F_{y,p0}$ は静押上力、 $F_{y,pc}$ は舟体とトロリ線との間に作用する接触力である。

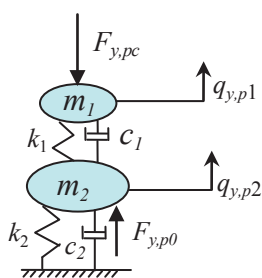


図2 パンタグラフのばね・質点モデル (2元系の場合)

### 3. 架線の静構造解析

#### 3.1 解析方法

架線・パンタグラフ系の運動シミュレーションを行うためには、まず架線の静構造解析を実施して架線の静的な構造を確定する必要がある。そこで、架線を図3に示すように要素分割する。ただし、前章で述べたとおり、各線条は Euler はり要素、ハンガ、曲線引金具については棒要素により、それぞれモデル化する。基本境界条件としては、①ちょう架線の各支持点位置、②ちょう架線とトロリ線の引き留め位置、③曲線引金具の取付点位置(アーム支持金具の位置)、を与える。

架線の静構造を確定させるためには、上記の基本境界条件のほかに、(i)ハンガ下点位置(トロリ線とハンガとの結合点の位置)を与える、あるいは(ii)ハンガ長さを与える、のどちらかが必要である。ただし、架線が

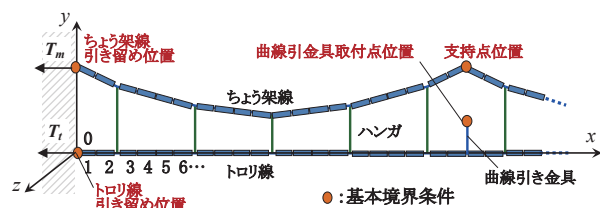


図3 架線のモデルと基本境界条件

複雑な3次元構造を有している場合には、あらかじめ全てのハンガ長さを決定することは難しい。そこで、ここではハンガ下点位置を与えて静構造解析を行う。

とはいえ、架線の3次元構造を考慮した上でハンガ下点位置(y座標とz座標)を与えること自体、容易ではない。そこでここでは、まず架線を2次元構造物とみなしてハンガ長を決定し、その後あらためて架線の3次元構造を求めることとする。すなわち、①架線の左右偏位を0に固定し、曲線引金具のない状態を考慮してトロリ線のハンガ下点高さ(y方向座標)を与える。②トロリ線だけに注目し、両端の引き留め位置とハンガ下点高さを基本境界条件として与え、ハンガ軸力を未知数と見なしてトロリ線の全節点の静的位置を決定する。ただし、線条に作用する重力は、等価な節点外力および節点モーメントの組合せとして与える。③ハンガ軸力、ならびにトロリ線引き留め位置における支点反力を求める。④ちょう架線だけに注目し、支持点高さと両端の引き留め位置を基本境界条件として与え、すでに求めたハンガ軸力と線条に作用する重力を既知外力として与えて、ちょう架線の静的位置を決定する。以上、①～④のステップにより2次元の架線静構造が決定されるため、ハンガ長を定めることができる。これらのステップでは幾何学的非線形性を考慮する必要はない。

続いて、以下の手順により架線の3次元静構造を求める。①2次元静構造解析により決定したハンガ長とハンガ軸力をもとに、ハンガの自然長(軸力が作用していないときの長さ)を決定する。②トロリ線、ちょう架線、ハンガ、曲線引金具を全て含む静的なつり合い方程式を作成する。③基本境界条件として、支持点位置、トロリ線とちょう架線の引き留め位置、および曲線引金具基部の取付点位置を与える。ただし、ここでは架線に左右偏位を与えることを前提として基本境界条件を与える。④各要素に作用する外力として、重力ならびに風荷重を与える。⑤静的なつり合い方程式を解き、基本境界条件として与えた点以外の節点位置を全て求める。

ただし、式(5)に示したように、3次元解析ではつり合い方程式が非線形である。そのため、反復計算により収束解を求める必要がある。いま、架線全体が静的につり合っている場合には、次式が成り立つ。ただし、この式は基本境界条件を満足しているものとする。

$$\mathbf{G}_{Nk}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}) - \mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

なお、 $\mathbf{G}_{Nk}$ は各部材に作用する線形復元力を、 $\mathbf{F}_{int}$ は非線形復元力を、それぞれベクトル表示したものである。また、 $\mathbf{F}$ は各接点に作用する外力ベクトルである。この式は非線形項を含むため、Newton Raphson法による反復計算によりこれを求める。

Newton Raphson法による反復計算では、式(7)の第1

近似解を与える必要がある。そこで2次元静構造計算の結果をもとに、非線形復元力  $\mathbf{F}_{int}$  であるハンガ軸力、ならびに曲線引金具の軸力を、式(5)の弾性剛性行列だけで表現し、第1近似解  $\mathbf{q}_0$  を求める。ただし、 $\mathbf{q}_0$  は式(7)を厳密には満足しない。そこで、式(7)を以下の形式に書き換える。

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}_{NK}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}) - \mathbf{F} \quad (8)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$  は不平衡力を表すベクトルであり、 $\mathbf{q}$  が真値のときに0となる。そこで、 $\mathbf{g}(\mathbf{q})=0$  を満足する  $\mathbf{q}$  を求めるため、以下の手順により反復計算を行う。すなわち、①第一近似解  $\mathbf{q}_0$  に対応する不平衡力  $\mathbf{g}(\mathbf{q}_0)$  を求める。②弾性剛性行列  $\mathbf{K}_0$  と幾何剛性行列  $\mathbf{K}_G$  の合計からなる接線剛性行列  $\mathbf{K}_t$  を作成する。③次式を解いて節点変位の修正量  $\Delta\mathbf{q}$  を求める。

$$-\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}_0} \Delta\mathbf{q} = -(\mathbf{K}_N + \mathbf{K}_0(\mathbf{q}_0) + \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_0))\Delta\mathbf{q} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_0) \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{K}_N$  は線形復元力を表す剛性行列である。また、境界条件として変位が与えられた節点では  $\Delta\mathbf{q}=0$  を常に満足するように、式(9)に対して基本境界条件を設定する。④次式により、新しい節点変位を与える。

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q} \quad (10)$$

以上のステップを繰り返し、不平衡力  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  が十分に小さくなったら収束解とする。

### 3.2 架線の静構造解析例

前節で述べた架線の静構造解析手法の収束性を検討するため、2スパン（径間長 50m）からなる単純なシングルカテナリ架線を例にとり、静構造解析を実施した。ただし、各支持点の左右偏位を200mmとし、重力のほかに、z方向に向かう 10m/s の一様な横風に起因する空気力を外力として与えた。

反復計算回数と不平衡力の合力 ( $\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{g}$ )、ならびに支点反力の合力 ( $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ ) との関係を図4に示す。第1近似解では、支点反力と同じオーダーの不平衡力が存在しているが、4回の反復計算により、不平衡力の支点反力に対する比が  $9 \times 10^{-12}$  程度にまで減少する。実際には、3回目の反復解でも実用上十分な精度である。反復4回後の収束解を図5に示す。

このように、幾何学的非線形性を考慮することにより、トロリ線左右偏位や曲線引金具によるトロリ線の引き上げ、風によるはらみ、などを正確に考慮した架線の3次元静構造解析が可能である。さらに、斜ちょう式架線のように複雑な3次元構造をもつ架線形式についても解析可能である。

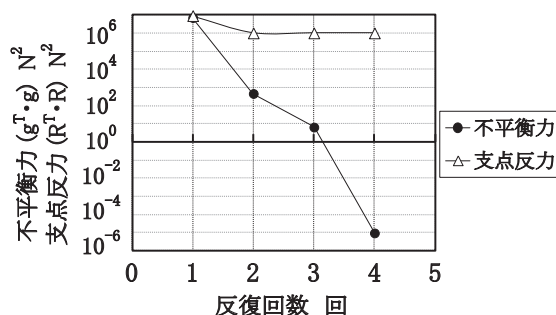


図4 静構造解析の収束性

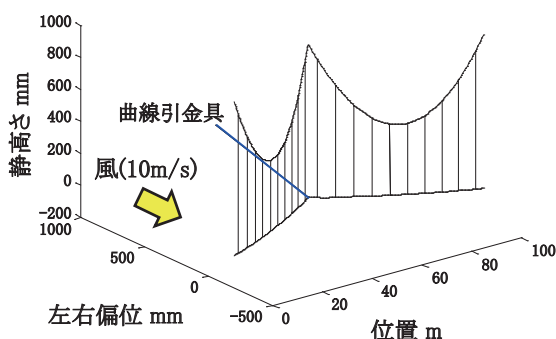


図5 静構造解析結果（反復4回後の収束解）

## 4. 架線・パンタグラフ系の3次元運動解析

### 4.1 架線とパンタグラフとの連成

パンタグラフがトロリ線の  $k$  番目要素と接触しているとする。このとき、トロリ線要素の節点変位ベクトル ( $\mathbf{q}_k^T, \mathbf{q}_{k+1}^T$ )<sup>T</sup> と接触点の並進変位ベクトル  $\mathbf{q}_{tc}$  との関係は式(2)をもとに次式により表現される。

$$\mathbf{q}_{tc} = \mathbf{Q}_k(\bar{x}_p) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 $\bar{x}_p$  はパンタグラフとトロリ線の接触位置をトロリ線要素の局所座標で表したものである。

同様に、パンタグラフとトロリ線との接触点における並進速度ベクトル  $\dot{\mathbf{q}}_{tc}$  と並進加速度ベクトル  $\ddot{\mathbf{q}}_{tc}$  は、それぞれトロリ線要素の節点変位ベクトルを用いて次式で表される。ただし、パンタグラフの走行速度を  $v$  とする。

$$\dot{\mathbf{q}}_{tc} = \mathbf{Q}_k(\bar{x}_p) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_{k+1} \end{bmatrix} + v \mathbf{Q}_k'(\bar{x}_p) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{tc} = \mathbf{Q}_k(\bar{x}_p) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_k \\ \ddot{\mathbf{q}}_{k+1} \end{bmatrix} + 2v \mathbf{Q}_k''(\bar{x}_p) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_{k+1} \end{bmatrix} + v^2 \mathbf{Q}_k'''(\bar{x}_p) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

一方、パンタグラフが接触しているトロリ線要素の節点外力ベクトル ( $\mathbf{F}_k^T, \mathbf{F}_{k+1}^T$ )<sup>T</sup> と、このトロリ線要素がパンタグラフから受ける接触力ベクトル  $\mathbf{F}_c$  との間には、仮想仕事の原理より以下の関係が成り立つ。ただし、接触



特集：鉄道力学

何学的非線形性を無視しているため、架線の左右偏位が常に0である条件を与え、幾何学的非線形性が現れない条件で計算を行った。なお、差分法におけるトロリ線の質点間隔を0.5mとし、有限要素法におけるトロリ線の要素長さも0.5mとした。図7に、パンタグラフに作用する接触力の計算結果を比較して示す。二つの手法による計算結果はよく合致していることから、本報告で提案する解析手続きは妥当であるものと判断できる。

次に、架線の3次元構造を考慮した場合の動的解析例を示す。図7と同じく、シンプルカテナリ架線をパンタグラフ1台が130km/hで走行する場合を想定し、以下の3種類の条件でシミュレーションを実行した。①架線の左右偏位が常に0とした場合、②架線に2径間1サイクル、±250mmの左右偏位を与えた場合、③架線に2径間1サイクル、±250mmの左右偏位を与え、さらにまくらぎ方向に20m/sの定常的な風を想定した場合。図8にその計算結果を示す。図8(a)は各条件における架線の静構造解析結果であり、図8(b)は各条件における接触力変動を比較したものである。架線に左右偏位を与えると、各支持点において横張力によるトロリ線の引き上げが発生するため、支持点近傍における接触力波形が変化する。この影響は各線条に対する風圧荷重の作用によりさらに大きくなる。

この例のように、架線を単純な2次元構造としてモデル化して実施したシミュレーションでは無視、あるいは近似的に評価されていた因子を、本解析手法では正確に反映させてシミュレーションを行うことが可能である。また、接触力を式(15)で表現しているため、トロリ線とすり板との間に作用するまくらぎ方向の摩擦力についても、容易に考慮することが可能である。

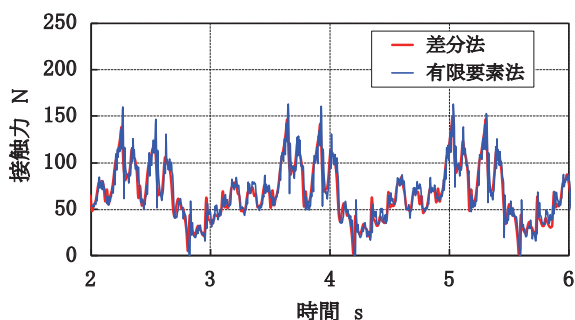


図7 差分法と有限要素法による計算結果の比較 (2次元のシンプルカテナリ架線)

5. おわりに

有限要素法に基づき、幾何学的非線形性を考慮したうえで架線・パンタグラフ系の3次元運動解析を行うシ

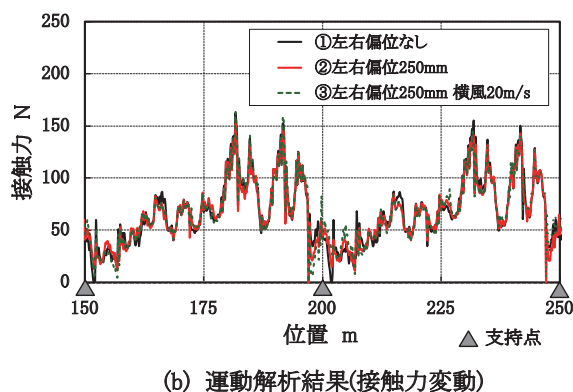
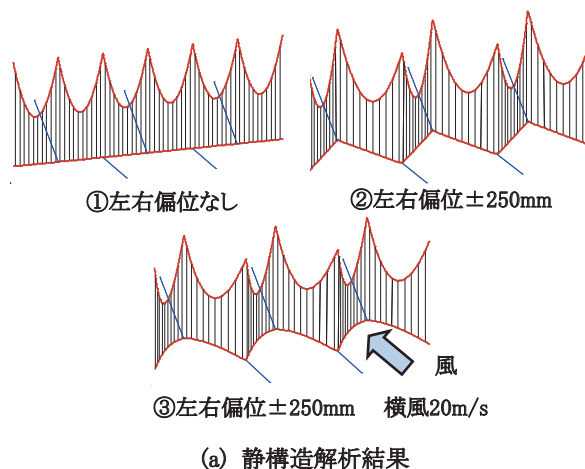


図8 架線の3次元構造を考慮したシミュレーション (有限要素法)

ミュレーション手法を開発した。本解析手法では、左右偏位や風荷重による線条のはらみなどの架線の3次元構造の影響を正確に反映したうえで、架線とパンタグラフの動的相互作用を評価することが可能である。今後はパンタグラフのモデルを改良し、集電性能のより詳細な検討の実現を目指す予定である。

文献

- 1) 真鍋克士：架線・パンタグラフ系の高速性能，日本機械学会論文集C編，Vol.54, No.504, pp.1843-1851, 1988
- 2) 網干光雄，真鍋克士：架線・パンタグラフの接触力変動解析，鉄道総研報告，Vol. 13, No.7, pp.7-12, 1999
- 3) 江原信郎：高速集電の動力学研究（第1報，高速集電系のモデルとその検討），日本機械学会論文集（第1部），Vol.36, No.287, pp.1067-1074, 1970
- 4) 網干光雄，大浦泰：地震時における電車線路の運動シミュレーション手法，平成20年電気学会産業応用部門大会，2008